УДК 620.193.4:624.012.45

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ, ЗАГРУЖЕННОЙ СИСТЕМОЙ ОСЕВЫХ СИЛ

Фомин В.М., Фомина И.П.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

Пусть на консольную балку действует система осевых сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, …,$\boldsymbol{P}_n$, приложенных в точках M_1, M_2,…,M_n (рис. 1). Участку балки на отрезке $M_{j-1}M_j$ присвоим номер j (j = 1,2,…,n). На каждом из участков введем локальную систему координат x_jy_j (j = 1,2,…,n). Допустим, что балка потеряла устойчивость и находится в изогнутом состоянии. Тогда изгибающий момент в сечении балки, находящемся на j-ом участке, определяется по формуле

$$M_{z,j} = \sum_{k=j}^{n} P_k [y_k(l_k) - y_j(x_j)]. \tag{1}$$

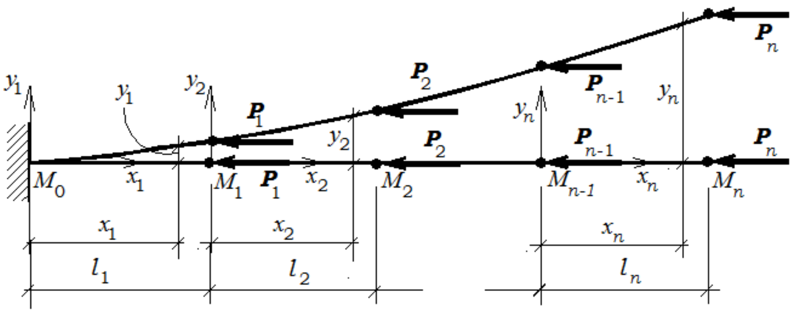

Рис. 1

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на этом участке запишется так:

$$H_j y_j'' = \sum_{k=j}^{n} P_k [y_k(l_k) - y_j(x_j)] \tag{2}$$

(H_j – изгибная жесткость балки на j-ом участке), Введем обозначения

$$P_j^* = \sum_{k=j}^{n} P_k, \; Y_j = \frac{\sum\limits_{k=j}^{n} P_k y_k(l_k)}{P_j^*}. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) запишется в следующем виде:

$$H_j y_j'' + P_j^* (y_j - Y_j) = 0\,. \tag{4}$$

Сделаем в уравнении (4) замену переменной

$$z_j(x_j) = y_j(x_j) - Y_j\,, \tag{5}$$

после чего оно примет следующий вид:

$$z_j'' + k_j^2 z_j = 0, \tag{6}$$

где

$$k_j = \sqrt{\frac{P_j^*}{H_j}}\,. \tag{7}$$

Из (3) вытекает, что

$$P_j^* Y_j = \sum_{k=j}^{n} P_k y_k(l_k), \; P_{j-1}^* Y_{j-1} = \sum_{k=j-1}^{n} P_k y_k(l_k). \tag{8}$$

Вычитая из первого равенства (8) второе и учитывая (5), получаем рекуррентные соотношения для Y_j (j = 2, 3,…,n)

$$Y_j = Y_{j-1} - \frac{P_{j-1}}{P_j^*} z_{j-1}(l_{j-1}). \tag{9}$$

Очевидно, на границах участков выполняются равенства

$$y_1(0) = 0, \; y_j(0) = y_{j-1}(l_{j-1}) \;\; (j = 2,3,...,n). \tag{10}$$

Подставляя сюда (5), находим

.

$$Y_1 = -z_1(0),\ Y_j = \sum_{k=1}^{j-1} z_k(l_k) - \sum_{k=1}^{j} z_k(0) \ \ (j = 2,3,...n)\ . \tag{11}$$

Подставляя полученные соотношения в (9), получаем граничные условия для дифференциальных уравнений (6)

$$z_j(0) = \frac{P^*_{j-1}}{P^*_j} z_{j-1}(l_{j-1}) \ \ (j = 2,3,...,n)\ . \tag{12}$$

Так как функции $y_j(x_j)$ и $z_j(x_j)$ отличаются только постоянным слагаемым, то из граничных условий для функций $y_j(x_j)$ (j = 1,2,..,n)

$$y'_1(0) = 0,\ y'_j(0) = y'_{j-1}(l_{j-1}) \ \ (j = 2,3,...,n)$$

прямо вытекают такие же условия для функций $z_j(x_j)$ (j = 1,2,..,n)

$$z'_1(0) = 0,\ z'_j(0) = z'_{j-1}(l_{j-1}) \ \ (j = 2,3,...,n)\ . \tag{13}$$

Общее решение уравнения (6) имеет следующий вид:

$$z_j(x_j) = C_1^{(j)} \cos k_j x_j + C_2^{(j)} \sin k_j x_j\ . \tag{14}$$

Из условий (12) и (13) находим

$$\begin{aligned} &C_2^{(1)} = 0, \\ &C_1^{(j)} - \frac{P^*_{j-1}}{P^*_j} C_1^{(j-1)} \cos k_{j-1} l_{j-1} - \frac{P^*_{j-1}}{P^*_j} C_2^{(j-1)} \sin k_{j-1} l_{j-1} = 0, \\ &C_2^{(j)} + \frac{k_{j-1}}{k_j} C_1^{(j-1)} \sin k_{j-1} l_{j-1} - \frac{k_{j-1}}{k_j} C_2^{(j-1)} \cos k_{j-1} l_{j-1} = 0, \\ &(j = 2,3,...,n). \end{aligned} \tag{15}$$

Заметим, что из (5) при $j = n$ и $x_n = l_n$ следует, что $z_n(l_n) = 0$, т.е.

$$C_1^{(n)} \cos k_n l_n + C_2^{(n)} \sin k_n l_n = 0. \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) образуют однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $C_k^{(j)}$ $(k = 1{,}2;\, j = 1{,}2{,}...{,}n)$. Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю. Это уравнение определяет систему поверхностей в n-мерном пространстве сил P_1, P_2,…,P_n, каждая точка на которых задает критические значения этих сил. Если ограничиться случаем, когда силы пропорциональны одному параметру (будем называть его обобщенной силой), то указанное уравнение будет давать значения обобщенной критической силы.

Если n не очень велико, то уравнение критических сил может быть построено в явном виде.

Пример.

Пусть $n = 3$. Из второго и третьего уравнений (15) (с учетом первого) при $j = 2$ получаем

$$C_1^{(2)} = \frac{P_1^*}{P_2^*}\cos k_1 l_1\, C_1^{(1)},\ C_2^{(2)} = -\frac{k_1}{k_2}\sin k_1 l_1\, C_1^{(1)}. \tag{17}$$

Из этих же уравнений при $j = 3$ находим

$$\begin{aligned} C_1^{(3)} &= \frac{P_2^*}{P_3^*}(\cos k_2 l_2\, C_1^{(2)} + \sin k_2 l_2\, C_2^{(2)}),\\ C_2^{(3)} &= -\frac{k_2}{k_3}(\sin k_2 l_2\, C_1^{(2)} - \cos k_2 l_2\, C_2^{(2)}). \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя сюда (17), приходим к следующим выражениям:

$$C_1^{(3)} = \frac{P_2^*}{P_3^*}\left(\frac{P_1^*}{P_2^*}\cos k_1 l_1 \cos k_2 l_2 - \frac{k_1}{k_2}\sin k_1 l_1 \sin k_2 l_2\right)C_1^{(1)},$$

$$C_2^{(3)} = -\frac{k_2}{k_3}\left(\frac{P_1^*}{P_2^*}\cos k_1 l_1 \sin k_2 l_2 + \frac{k_1}{k_2}\sin k_1 l_1 \cos k_2 l_2\right)C_1^{(1)}.$$

Эти выражения подставляем в (16) при $n = 3$. В результате получаем уравнение

$$[\frac{P_2^*}{P_3^*}(\frac{P_1^*}{P_2^*}\cos k_1 l_1 \cos k_2 l_2 - \frac{k_1}{k_2}\sin k_1 l_1 \sin k_2 l_2)\cos k_3 l_3 -$$
$$-\frac{k_2}{k_3}(\frac{P_1^*}{P_2^*}\cos k_1 l_1 \sin k_2 l_2 + \frac{k_1}{k_2}\sin k_1 l_1 \cos k_2 l_2)\sin k_3 l_3]C_1^{(1)} = 0.$$

Для того чтобы $C_1^{(1)} \neq 0$ необходимо, чтобы

$$\frac{P_2^*}{P_3^*}(\frac{P_1^*}{P_2^*}\cos k_1 l_1 \cos k_2 l_2 - \frac{k_1}{k_2}\sin k_1 l_1 \sin k_2 l_2)\cos k_3 l_3 -$$
$$-\frac{k_2}{k_3}(\frac{P_1^*}{P_2^*}\cos k_1 l_1 \sin k_2 l_2 + \frac{k_1}{k_2}\sin k_1 l_1 \cos k_2 l_2)\sin k_3 l_3 = 0. \quad (19)$$

Это и есть уравнение критических сил. Допустим теперь, что

$$P_1 = P_2 = P_3 = P,\ H_1 = H_2 = H_3 = H,\ l_1 = l_2 = l_3 = l.$$

Будем считать P обобщенной силой. Используя (3) и (7) и разделив обе части равенства на $\cos k_1 l_1 \cos k_2 l_2$, приводим (19) к следующему виду:

$$B(A - \mathrm{tg}\sqrt{3a}\ \mathrm{tg}\sqrt{2a}) - \mathrm{tg}\sqrt{a}\ (A\ \mathrm{tg}\sqrt{2a} + \mathrm{tg}\sqrt{3a}) = 0. \quad (20)$$

Здесь $A = \sqrt{1.5},\ B = \sqrt{2},\ a = l^2 P / H.$

Наименьший положительный корень уравнения (20): a = 0.1857585. Таким образом значение критической обобщенной силы

$$P_{kp} = 0.1857585\ H / l^2.$$

Вывод

Алгоритм, предложенный в статье, позволяет исследовать устойчивость консольной балки, загруженной системой осевых сил.

Summary

The algorithm offered in the article allows to investigate stability of cantilever beam loaded by the system of axial forces.