УДК 624.042.7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ДЛЯ ПРОТЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Фомин В.М. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Излагается модифицированный вариант метода, предложенного автором в [1] для определения сейсмических нагрузок при расчете протяженных пространственных конструкций с учетом неоднородности движения грунта.

Проблема определения сейсмических воздействий на сооружения является актуальной и в настоящее время. Как правило, методы определения сейсмических нагрузок связаны с созданием специальных моделей и принятием некоторых допущений о поведении конструкций во время землетрясений и формах их колебаний $[2-4]$. В изложенном ниже методе не используются какие-либо модели или допущения о поведении конструкций.

Применяя метод конечных элементов, производим дискретизацию заданной конструкции. В результате получаем систему узлов – *внутренних*, несущих сосредоточенные массы, и *граничных* (или *опорных*), находящихся в грунте. Если грунт неподвижен, то и опорные узлы неподвижны. Конструкцию с неподвижно защемленными опорными узлами будем называть *основной*.

Движение частиц грунта вызывает перемещение узлов. Пусть $\mathbf{v}$ - вектор перемещений внутренних узлов заданной конструкции относительно неподвижной системы координат. Тогда можно записать следующее равенство:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u} \tag{1}$$

где $\mathbf{w}$ - вектор квазистатических перемещений внутренних узлов, вызванных смещением опорных, а элементами вектора $\mathbf{u}$ являются перемещения внутренних узлов основной конструкции.

Пренебрегая незначительными изменениями матрицы жесткости конструкции, вызванными смещениями опорных узлов, можно описать движение конструкции при помощи уравнения

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2}$$

где $\mathbf{M}$ - диагональная матрица масс, $\mathbf{K}$ - матрица жёсткости основной конструкции.

Вектор $\mathbf{w}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n_0}\sum_{k=1}^{m_0}\mathbf{d}^{(jk)}v_k^{(j)} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{d}^{(jk)}$ - вектор перемещений внутренних узлов конструкции, полученной из основной путем освобождения k-й степени свободы j-го опорного узла при единичном перемещении этого узла в направлении указанной степени свободы; n_0 - количество опорных узлов; m_0 - число освобождаемых степеней свободы для каждого опорного узла (при рассмотрении сдвиговых волн в грунте m_0 равно двум, в общем случае m_0=6); $v_k^{(j)}$ - величина перемещения j-го опорного узла в направлении k-ой степени свободы.

Подставляя (3) в (1), а затем (1) в (2), будем иметь

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{s}$$

$$\mathbf{s} = -\mathbf{M}[\ddot{\mathbf{u}} + \sum_{j=1}^{n_0}\sum_{k=1}^{m_0}\mathbf{d}^{(jk)}v_k^{(j)}] \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{s}$ - вектор так называемых сейсмических нагрузок.

Уравнения (4) могут быть записаны и так

$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{p}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + \mathbf{M\ddot{u}} = -\mathbf{M}\sum_{j=1}^{n_0}\sum_{k=1}^{m_0}\mathbf{d}^{(jk)}v_k^{(j)} \tag{5}$$

Пусть $\mathbf{U}$ - матрица, столбцы которой являются $\mathbf{M}$-ортонормированными формами свободных колебаний основной конструкции:

$$\mathbf{KU} - \mathbf{MU\Lambda} = 0,\ \ \mathbf{U'MU} = \mathbf{I} \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{I}$ - n_2-мерная единичная матрица ($n_2 = 3n_1$, n_1 - число внутренних узлов конструкции), а Λ - диагональная матрица , на диагонали которой расположены квадраты круговых частот собствѐнных колебаний основной конструкции.

Делая в (5) подстановку

$$\mathbf{u} = \mathbf{Uq} \tag{7}$$

и используя (6), получаем

$$\mathbf{\ddot{x}} + \Lambda\mathbf{x} = \mathbf{q},\quad \mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} \tag{8}$$

Решение системы (8) может быть записано в следующем виде [4]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{\tilde{q}} \tag{9}$$

где $\mathbf{q}$ - вектор с элементами

$$\tilde{q}_i(t) = D_i(q_i(t)) \tag{10}$$

Преобразование $D_i(f(t))$ определяется равенством

$$D_i(f(t)) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \quad (i = 1,2,\ldots,n_2) \tag{11}$$

(ω_i - одна из круговых частот основной конструкции).

Из (5) и (8) следует, что

$$\mathbf{s} = \mathbf{p} - \mathbf{MU\ddot{x}} = \mathbf{p} - \mathbf{MU}(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} - \Lambda\mathbf{x}) = \mathbf{KU\tilde{q}} \tag{12}$$

С другой стороны, из этих же формул получаем

$$\mathbf{q} = -\mathbf{U}^{-1}\sum_{j=1}^{n_0}\sum_{k=1}^{m_0}\mathbf{d}^{(jk)}v_k^{(j)} \tag{13}$$

Используя линейные свойства преобразования (11), находим

$$\widetilde{q}_i = -\sum_{m=1}^{n_2} U_{im}^{(-1)} \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{m_0} \mathbf{d}^{(jk)} F_{jli} \tag{14}$$

где $F_{jli} = D_i(\ddot{v}_i^{(j)})$, $U_{im}^{(-1)}$ - элементы матрицы $\mathbf{U}^{-1}$.

Пусть под конструкцией проходит упругая волна. Можно считать, что в пределах сооружения форма волны не успевает измениться. Тогда $\ddot{v}_i^{(j)}(t)$ при $j > 1$ представляет собою сдвинутую вдоль оси t функцию $\ddot{v}_i^{(1)}(t)$. Если учесть, что $\ddot{v}_i^{(1)}(t)$=0 при $t < 0$, то то же самое может быть сказано и о функциях $F_{jli}(t)$ при фиксированных l и i. Действуя по обычной методике спектрального метода [5], получаем

$$F_{jli} = \phi_{jli}(t) f_{li}, \quad f_{li} = \frac{\beta_{li} k_s g}{\omega_i^2} \tag{15}$$

где

$\phi_{jli}(t) = F_{jli}(t) / F_{1li,\max}$, $\beta_{li} = \omega_i^2 F_{1li,\max} / \ddot{v}_{1,\max}$, $k_s = \ddot{v}_{1,\max} / g$

(g - ускорение свободного падения тел).

Очевидно

$$|\phi_{jli}(t)| \leq 1 \tag{16}$$

Пусть условия сейсмостойкости выглядят так:

$$|u_k| \leq u_0 \quad (k = 1,2,\ldots,n_2) \tag{17}$$

Это означает, чть необходимо определить сейсмическую нагрузку, при которой $|u_k|$ принимает максимальное значение.

Из (4) и (12) получаем

$$u_k = -\sum_{i=1}^{n_2} \sum_{m=1}^{n_2} U_{ki} U_{im}^{(-1)} \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{l=1}^{m_0} d_m^{(jl)} \phi_{jli} f_{li} \tag{18}$$

Выражение (18) может быть записано в следующем виде:

$$u_k = \sum_{j=1}^{n_0}\sum_{l=1}^{m_0}\sum_{i=1}^{n_2} B_{kjli}\phi_{jli}$$
$$B_{kjli} = -f_{li}\sum_{m=1}^{n_2} U_{ki}U_{im}^{(-1)}d_m^{(jl)} \tag{19}$$

Из первого равенства (4) следует

$$s_p = \sum_{q=1}^{n_2} K_{pq}\sum_{j=1}^{n_0}\sum_{l=1}^{m_0}\sum_{i=1}^{n_2} B_{qjli}\phi_{jli} \tag{20}$$

Формула (19) показывает, что u_k является линейной формой элементов ϕ_{jli} $(j = 1,2,...,n_0; i = 1,2,...,m_0; i = 1,2,...,n_2)$. Необходимо найти точку параллелепипеда (16), в которой u_k, а значит, и $|u_k|$ принимает максимальное значение. Очевидно, это вершина параллелепипеда с координатами

$$\phi_{jli}^{(k)} = \text{sgn}(B_{kjli})(j = 1,2,...,n_0; i = 1,2,...,m_0; i = 1,2,...,n_2) \tag{21}$$

Таким образом, вектор сейсмических нагрузок, при которых величина перемещения u_k достигает наибольшего значения, может быть определен по формуле (20), в которой ϕ_{jli}, заменяются $\phi_{jli}^{(k)}$. Неудобство состоит в том, что для каждого u_k $(k = 1,2,...,n_2)$ необходимо определять свой вектор сейсмических нагрузок. Этот недостаток можно преодолеть, если ввести более жесткое требование сейсмостойкости:

$$\|\mathbf{u}\| \le u_0 \;\left(\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_2} u_k^2}\; \right) \tag{22}$$

В этом случае задача состоит в определении сейсмической нагрузки, при которой $\|\mathbf{u}\|$ принимает максимальное значение, т.е. необходимо найти точку параллелепипеда (16), в которой положительно определенная квадратичная форма

$$c(\phi) = \|\mathbf{u}(\phi)\|^2 = \mathbf{u}'(\phi)\mathbf{u}(\phi) = \phi'\mathbf{C}\phi \tag{23}$$

принимает наибольшее значение.

Здесь ϕ - вектор с координатами ϕ_m (m - упорядоченная тройка индексов jli; $j = 1,2,...,n_0$; $l = 1,2,...,m_0$; $i = 1,2,...,n_2$), а $\mathbf{C}$ - матрица с элементами

$$C_{pqrjli} = \sum_{k=1}^{n_2} B_{kpqr} B_{kjli} \tag{24}$$

Из положительной определенности матрицы $\mathbf{C}$ следует, что форма (23) принимает наибольшее значение в вершинах параллелепипеда (16), наименее удаленных от линии $\phi = \lambda \mathbf{e}_1$ (λ - переменный скаляр, $\mathbf{e}_1$ - собственный вектор матрицы $\mathbf{C}$, соответствующий ее наибольшему собственному числу). Заметим, что координаты одной из этих вершин может быть найдены из формулы

$$\phi_m = \operatorname{sgn}(e_{1m}) \; (m = 1,2,...,N; N = n_0 m_0 n_2) \tag{25}$$

где e_{1m} - координаты вектора $\mathbf{e}_1$. Координаты второй вершины имеют противоположные знаки. Вектор сейсмических узловых нагрузок, придающих $\| \mathbf{u} \|$ максимальное значение, определяется по формуле (20), в которой ϕ_{klj} вычисляются по формуле (25).

Если условия сейсмостойкости заданы следующим образом:

$$| \sigma_k | \le \sigma_0 \;\; (k = 1,2,...,n_3) \tag{24}$$

где σ_k - максимальные напряжения в некоторых сечениях конструкции, число которых равняется n_3, а σ_0 - некоторая заданная величина, то используя равенство

$$\sigma = \mathbf{Rs} \tag{25}$$

($\mathbf{R}$ - матрица, определяемая основной конструкцией) и действуя аналогично изложенному выше, получаем

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{l=1}^{m_0} \sum_{i=1}^{n_2} B_{kjli} \phi_{jli} \tag{26}$$

где в этом случае $B_{kjli} = -f_{li} \sum_{m=1}^{n_2} T_{ki} U_{im}^{(-1)} d_m^{(jl)}$, а T_{ki} - элементы матрицы $\mathbf{T} = \mathbf{RKU}$..

Затем определяя ϕ_{jli} в соответствии с правилом (21) и подставляя их в (20), находим вектор сейсмических нагрузок, который представляет собой наиболее невыгодное загружение для напряжения σ_k.

Так же как и для перемещений определяются сейсмические нагрузки, если условие сейсмостойкости выглядит так

$$\|\sigma\| \le \sigma_0 \quad (\|\sigma\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_3} \sigma_k^2}) \tag{27}$$

Вывод

Таким образом, изложенный выше метод позволяет определить наиболее невыгодные для сооружения сейсмические воздействия, которые могут возникнуть при землетрясениях, без принятия каких-либо специальных моделей поведения конструкции.

Литература

1. Фомин В.М. К сейсмическому проектированию протяженных конструкций //Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений., 2001, №1.- с. 32-35.

2. Егупов В.К., Командрина Т.А., Голобородько В.Н. Пространственные расчеты зданий. К.: Будівельник , 1976.-264 с.

3. Егупов В.К., Егупов К.В., Лукаш Е.П. Практические вычислительные методы в сейсмостойком строительстве. – К.: Будівельник, 1982.-144 с.

4. Николаенко Н.А., Назаров Ю.П. Динамика и сейсмостойкость сооружений. М.: Стройиздат, 1988. – 310 с.

5. Поляков С.В. Сейсмостойкие конструкции зданий. М.: Высшая школа, 1983. – 307 с.