

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.В.Ковров, А.Ю.Болгар, Р.Э.Чайковский (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса)

Предложена методика определения частот собственных колебаний неразрезной балки при помощи численно-аналитического варианта МГЭ. Приведен пример определения частот собственных колебаний неразрезной бесконсольной балки.

Приближенное дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки имеет вид, приведенный в работах [1], [2]:

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - m\omega^2 v(x) = q(x), \quad (1)$$

где: EI – поперечная жёсткость балки;
 $v(x)$ – поперечный прогиб;
 m – погонная масса;
 ω – частота собственных колебаний;
 $q(x)$ – поперечная нагрузка.

Положительные направления внешних воздействий, приложенных к балке, принятые направления координатных осей и обозначения координат точек их приложения приведены в работах [1], [2].

Решение уравнения (1) по стандартному алгоритму, изложенному в работах [1], [2], приводится к виду:

$$\begin{bmatrix} EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \lambda^4 A_{14} & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -\lambda^4 A_{13} & -\lambda^4 A_{14} & A_{11} & A_{12} \\ -\lambda^4 A_{12} & -\lambda^4 A_{13} & \lambda^4 A_{14} & A_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \\ -B_{31}(x) \\ -B_{41}(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Или компактно:

$$Y(x) = A(x)X(0) + B(x). \quad (3)$$

где: $X(0)$ – матрица усилий и перемещений в начале координат (вектор начальных параметров);

$B(x)$ – матрица внешней нагрузки, каждый элемент которой может быть сформирован при помощи метода начальных параметров;

$Y(x)$ – матрица усилий и перемещений (вектор состояния в текущей точке x);

$A(x)$ – матрица фундаментальных ортонормированных функций Крылова.

Параметр λ определяется выражением:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}}. \quad (4)$$

После равносильных преобразований уравнение (3) при $x=l$ принимает вид:

$$A(l)X(0) - Y(l) = -B(l) \Rightarrow A^* \cdot X^*(0) = -B(l). \quad (5)$$

При определении частот собственных колебаний балки уравнение (5) принимает вид:

$$A^* \cdot X^*(0) = 0. \quad (6)$$

Эта система имеет нетривиальное решение ($X^* \neq 0$), если ее определитель равен нулю, т.е.

$$|A^*(\omega)| = 0. \quad (7)$$

Данное уравнение является трансцендентным частотным уравнением, корни которого дают полный спектр частот собственных колебаний стержневой системы. Данный определитель содержит лишь систему фундаментальных ортонормированных функций, что позволяет существенно упростить поиск частот собственных колебаний.

В работах [1], [2] предложено предварительно строить график изменения определителя $|A^*(\omega)|$. Затем, уменьшая интервалы изучения частот, определять точки изменения их знаков (мест пересечения оси частот).

Рассмотрим интервал, содержащий корень уравнения (рис. 1).

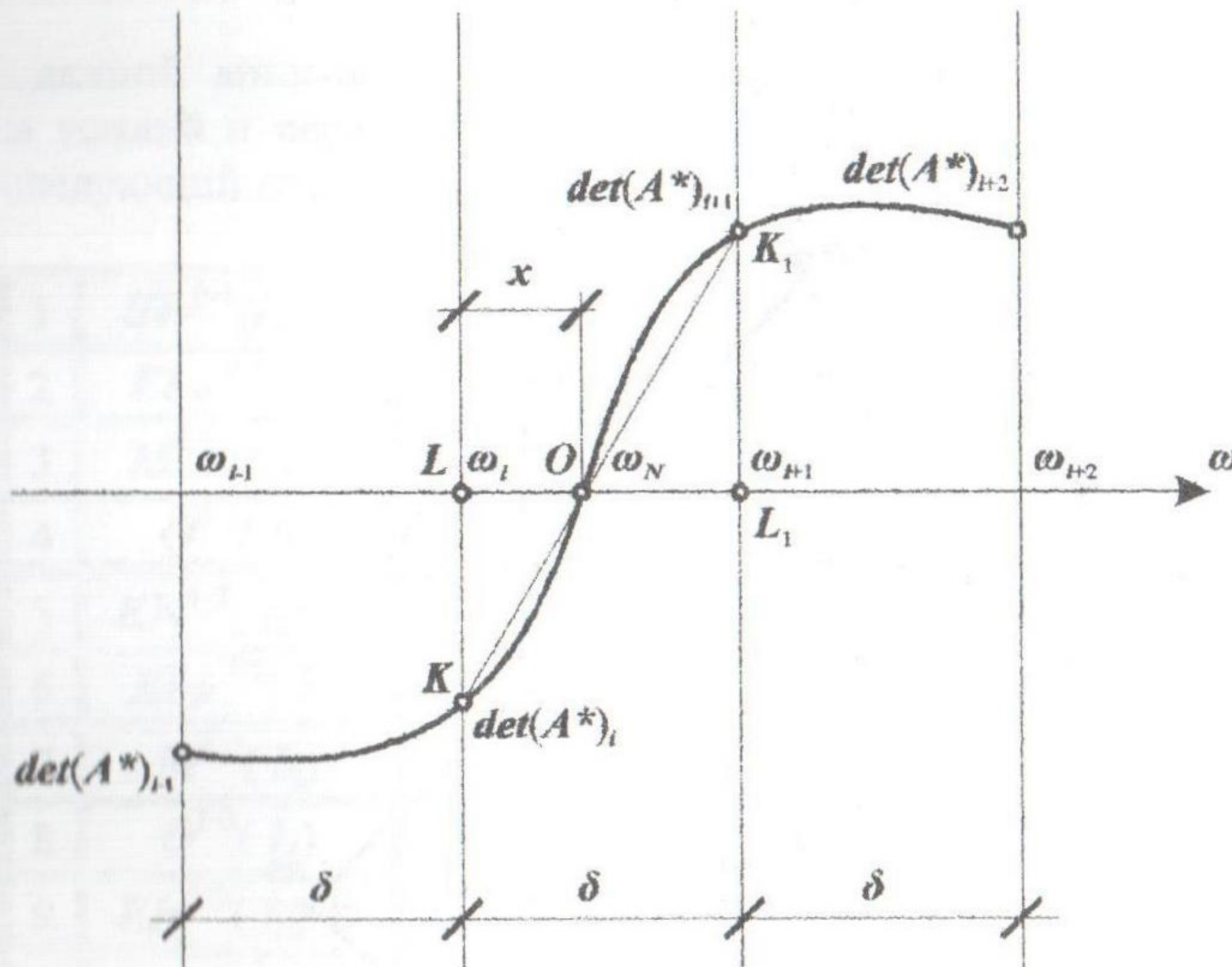


Рис. 1.

Представим, что значения определителя между точками K и K_1 изменяются по линейному закону.

Тогда из подобия треугольников очевидно, что справедливы следующие выражения:

$$x = \frac{|det(A^*)_i| \delta}{|det(A^*)_i| + |det(A^*)_{i+1}|}; \quad (8)$$

$$\omega_N = \omega_i + x.$$

Принимаем следующие обозначения:

ω_0 – начальная частота собственных колебаний;

Δl – шаг разбиения оси частот;

δ – шаг изменения частоты;
 n – число циклов вычисления определителя $\det(A^*)$;
 N – заданное количество искоемых частот собственных колебаний.
 Корни уравнения (7) – собственные частоты находятся по алгоритму, представленному в блок-схеме, приведенной на рис.2.

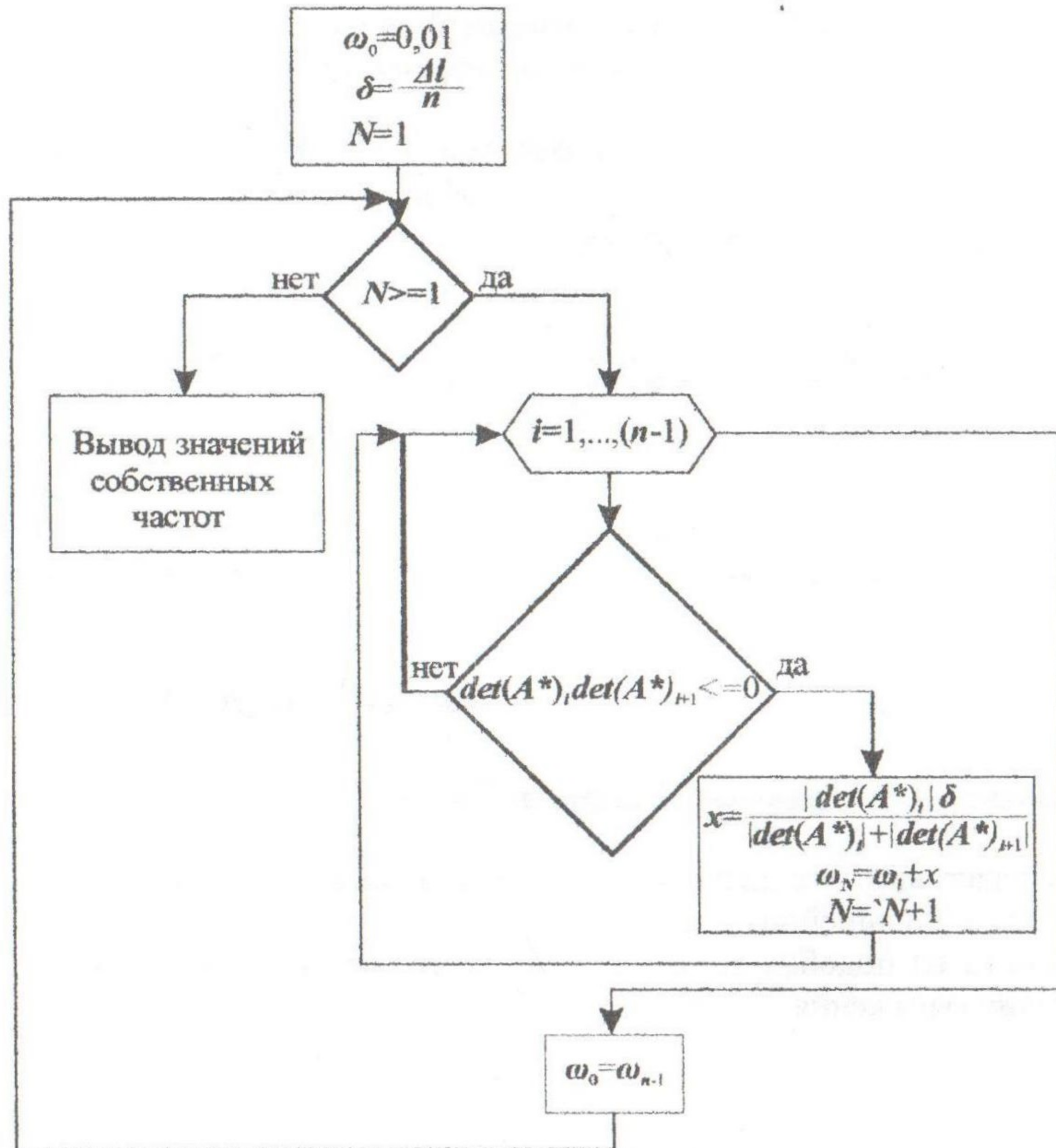


Рис.2.

Рассмотрим многопролетную бесконсольную неразрезную балку (рис.3). Пусть $EI=1$, $m=1$, $N=10$.

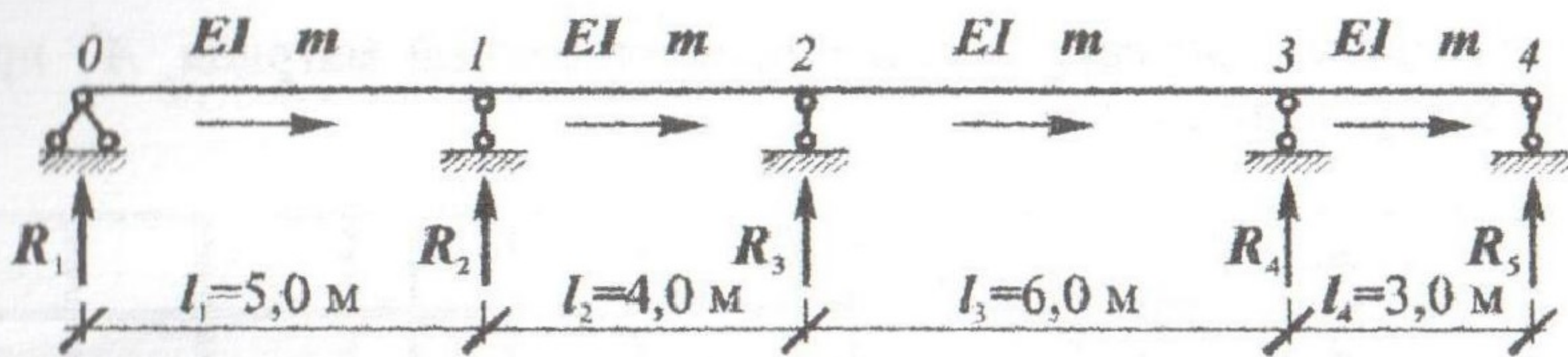


Рис.3.

Для данной многопролетной неразрезной бесконсольной балки матрицы усилий и перемещений начальных и граничных параметров имеют следующий вид:

1	$EIv^{0-1}(l_1)=0$
2	$EI\phi^{0-1}(l_1)$
3	$M^{0-1}(l_1)=0$
4	$O^{0-1}(l_1)$
5	$EIv^{1-2}(l_2)=0$
6	$EI\phi^{1-2}(l_2)$
7	$M^{1-2}(l_2)$
8	$O^{1-2}(l_2)$
9	$EIv^{2-3}(l_3)=0$
10	$EI\phi^{2-3}(l_3)$
11	$M^{2-3}(l_3)$
12	$O^{2-3}(l_3)$
13	$EIv^{3-4}(l_4)=0$
14	$EI\phi^{3-4}(l_4)$
15	$M^{3-4}(l_4)=0$
16	$O^{3-4}(l_4)$

 $X(0) =$

1	$EIv^{0-1}(0)=0$
2	$EI\phi^{0-1}(0)$
3	$M^{0-1}(0)=0$
4	$O^{0-1}(0)$
5	$EIv^{1-2}(0)=0$
6	$EI\phi^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$O^{1-2}(0)$
9	$EIv^{2-3}(0)=0$
10	$EI\phi^{2-3}(0)$
11	$M^{2-3}(0)$
12	$O^{2-3}(0)$
13	$EIv^{3-4}(0)=0$
14	$EI\phi^{3-4}(0)$
15	$M^{3-4}(0)$
16	$O^{3-4}(0)$

 $Y(l_i) =$
(9)

Суть преобразования уравнения (5) заключается в том, что нулевые начальные параметры матрицы $X(0)$ заменяются неизвестными конечными параметрами матрицы $Y(l)$. При этом обнуляются отдельные столбцы матрицы $A(l)$, соответствующие нулевым строкам матрицы $X(0)$, и вводятся компенсирующие элементы, соответствующие переносу конечных параметров из матрицы $Y(l)$ в $X(0)$.

В результате соответствующих преобразований матрица A^* принимает следующий вид:

A_{12}	$-A_{14}$													
A_{11}	$-A_{13}$	-1												
$-\lambda^4 A_{14}$	A_{12}		-1											
-1	$-\lambda^4 A_{13}$	A_{11}												
			A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$									
			A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	-1								
			$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}		-1							
	-1		$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}									
						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$						
						A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	-1					
						$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}		-1				
		-1				$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}						
									A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$			
							-1		A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$			
									$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}			
								-1	$\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}			

Решая уравнение (7), получаем спектр частот собственных колебаний.

Задавая значения $\Delta l = 0,02$ и $n = 200$, получаем точность значений частот собственных колебаний до шестого знака включительно.

$$\omega_1 = 4.046561e-001 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_2 = 4.935589e-001 \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_3 = 9.396100e-001 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_4 = 1.228264e+000 \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_5 = 1.609618e+000 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_6 = 1.813036e+000 \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_7 = 2.725683e+000 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_8 = 3.212840e+000 \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_9 = 3.952649e+000 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_{10} = 4.569162e+000 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Выводы

Предложенная методика определения частот собственных колебаний неразрезной балки при помощи численно-аналитического варианта МГЭ позволяет определить любое наперед заданное количество частот с любой заданной точностью вычислений.

Полученные значения частот собственных колебаний для рассмотренной в статье неразрезной балки полностью совпадают со значениями, полученными с использованием системы ANSYS.

Литература

1. Баженов В. А., Дашенко А. Ф., Оробей В. Ф. и др. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов – Одесса: Астропринт, 2001. – 228 с.
2. Оробей В. Ф., Ковров А.В. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов. – Одесса, 2004. – 122 с.