УДК 593.3

РАСЧЕТ БАЛОК ПОСТОЯННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПО ДВУМ ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Кобринец В.М.(*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса*)

Получены обобщенные характеристики изгибаемых элементов на основании гауссовой кривизны и гильбертова пространства. Показано их применение при расчете балок по двум предельным состояниям.

Деформированное состояние изгибаемых элементов характеризуется прогибом $y(x)$ и кривизной нейтральной оси. По этим параметрам можно вычислить гауссову кривизну

$$K = \frac{y''(x)}{y(x)\left[1 + y'(x)^2\right]^{3/2}} \tag{1}$$

Для балочных конструкций $y'(x)$ весьма мало по сравнению с единицей, поэтому расчеты выполняются в геометрически линейной постановке. В данном исследовании будем придерживаться этого допущения.

Рассмотрим шарнирно опертую балку загруженную равномерно-распределенной нагрузкой. Запишем кривизну и прогиб балки для произвольного сечения

$$y'' = \frac{q}{2EI}x(l - x), \tag{2}$$

$$y(x) = \frac{q}{24EI}(l - x)\left(l^2 + lx - x^2\right) \tag{3}$$

Вычислим гауссову кривизну для этого варианта загружения, подставив (2) и (3) в (1)

$$K = \frac{12}{l^2 + lx - x^2} \tag{4}$$

Эта характеристика не зависит от величины нагрузки и изгибной жесткости.

Геометрическая интерпретация (4) представляет собой положительную гауссову кривизну поверхности, образованной вращением нейтральной оси x (Рис. 1). При этом главные радиусы

$$\rho_1 = \frac{EI}{M(x)};\ \rho_2 = y(x)$$

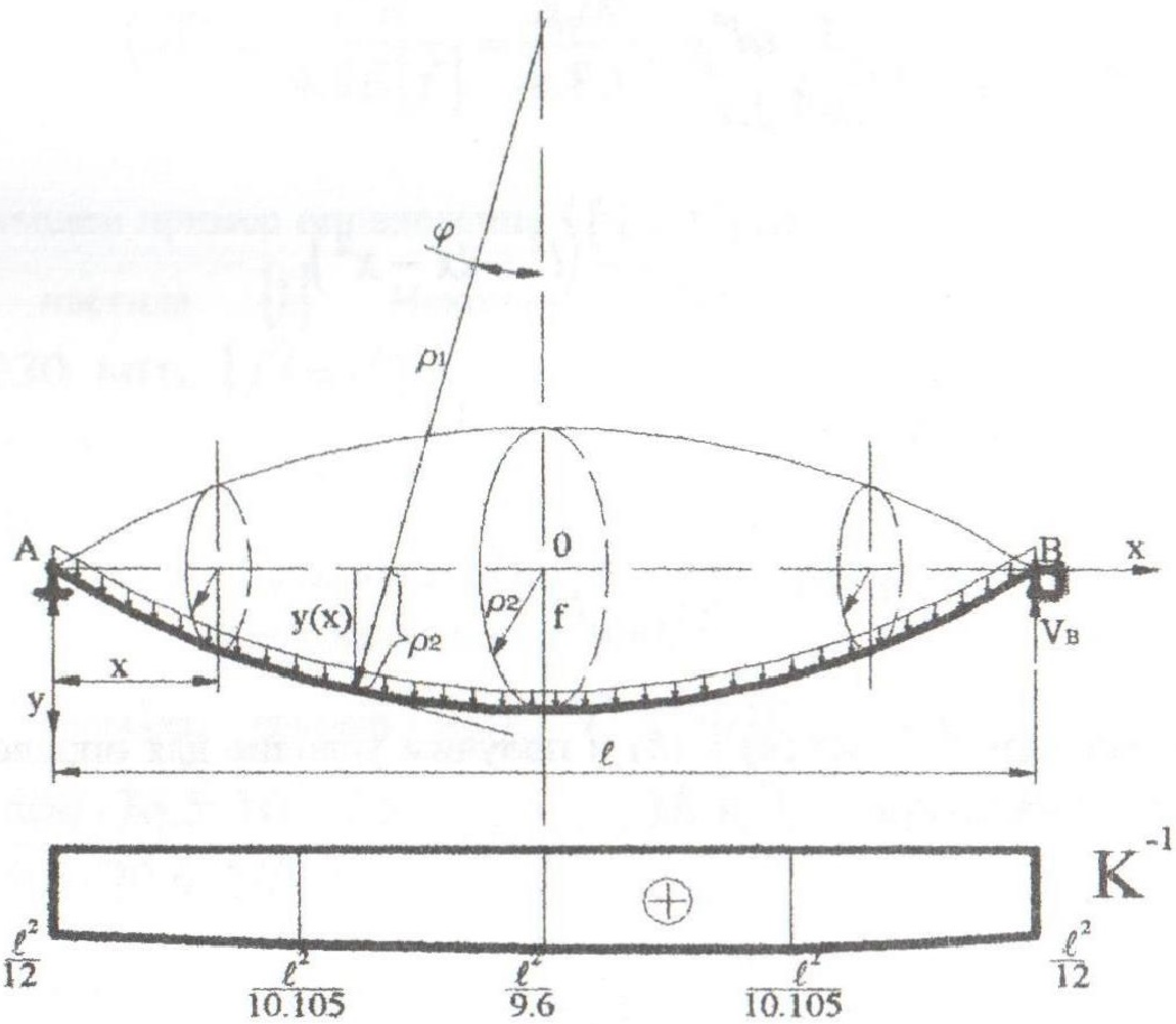

Рис.1 Деформированное состояние балки
а) – поверхность вращения;
б) – эпюра обратной гауссовой кривизны

На рис. 1 показана эпюра $K^{-1} = \rho_1\rho_2$. Первым инвариантом для балки с равномерно-распределенной нагрузкой будем считать

$$\dot{I}_{1.q} = K^{-1}(y_2) = \frac{l^2}{9.6}. \qquad (5)$$

Выразим ρ_1 через $M_{\max} = \dfrac{ql^2}{8}$

$$\rho_1 = \frac{EIl^2}{4M_{\max}x(l-x)}, \qquad (6)$$

ρ_2 через $f_{\max} = \dfrac{5}{384}\dfrac{ql^4}{EI}$

$$\rho_2 = f_{\max}\frac{16x(l-x)}{5l^4}\left(l^2 + lx - x^2\right). \qquad (7)$$

Подставим (6) и (7) в выражение для K^{-1}

$$K^{-1} = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{4EIf_{\max}}{5M_{\max}l^2}\left(l^2 + lx - x^2\right). \qquad (8)$$

Приравняем K^{-1} из (4) к (8) и получим условие для определения отношения максимумов f и M

$$\frac{f_{\max}}{M_{\max}} = \frac{l^2}{9.6EI}. \qquad (9)$$

Это условие обладает замечательным свойством. Оно не зависит от выбора сечения по длине балки, т.е. от x. Это особенно важно для тех случаев, когда максимальный прогиб и максимальный момент не совпадают.

Максимальные значения прогибов необходимо ограничить допускаемым $f_{\max} \leq [f]$, а максимальные напряжения пределом прочности $\sigma_{\max} \leq R$. При этих условиях из (9) получим требуемое значение параметров поперечного сечения

$$I_x^{Tp} = \frac{l^2 M_{\max}}{9.6E[f]}, \text{либо} \left(\frac{f_x}{W_x}\right)^{Tp} = \frac{l^2[R]}{9.6E[f]}. \qquad (10)$$

Для симметричных сечений

$$(h)^{Tp} = \frac{l^2 R}{4.8E[f]} = \frac{n_0 l R}{4.8E}; \; n_0 = \frac{l}{[f]}. \qquad (11)$$

Приведем пример определения $(h)^{Tp}$ для металлической прокатной балки настила [1]. Исходные данные: $E = 2.06 \cdot 10^5$ МПа, $R_y = 230$ МПа, $[f] = l/250$, $l = 600$ см, $c_1 = 1.1$. По формуле (11) $h^{Tp} = 31.72$ см, – можно принять двутавр №30. если учесть, что прогиб определяется от нормативной нагрузки, то в формулах (10) и (11) необходимо в знаменателе ввести коэффициент надежности по нагрузкам, допустим $\gamma_{fp} = 1.15$. При максимальном моменте $M_{\max} = 76.5$ кНм в работе [1] и подобран двутавр №27, $I_x = 5010$ см^4. По формуле (10) $I_x^{Tp} = \dfrac{600 \cdot 76.5 \cdot 10^5 \cdot 250}{9.6 \cdot 20.6 \cdot 10^6 \cdot 1.15} = 5045.63$ см^4.

Результаты расчета по существующей методике достоверны, так как они соответствуют самым общим критериям работы балок.

Проблему обобщенных характеристик можно рассмотреть с другой стороны. Изгибные моменты и прогибы – это функции, которые определены на одном и том же интервале $0 \leq x \leq l$. Значение этих функций вещественные. На заданном интервале можно выбрать n – значений x_i и для этих значений определить n – значений $\rho_1(x_i)$ и $\rho_2(x_i)$. Такие функции образуют n – мерное векторное пространство. При сгущении узловых значений x_i n – мерное пространство переходит в бесконечномерное. Следовательно, можно вычислить «длину вектора» $\rho_1(x_i)$ и $\rho_2(x_i)$, которая называется нормой

$$\|\rho_1\|^2 = \int_0^l [\rho_1(x_i)]^2 dx; \; \|\rho_2\|^2 = \int_0^l [\rho_2(x_i)]^2 dx. \tag{12}$$

Эти же функции позволяют вычислить скалярное произведение

$$\Gamma = (\rho_2, \rho_2) = \int_0^l \rho_1(x)\rho_2(x)dx. \tag{13}$$

Пространство функций со скалярным произведением и нормой образуют вещественное гильбертово пространство функций на заданном интервале $0 - l$ [2]. Интервалы могут быть другие и их может быть несколько. Функции могут быть непрерывные, разрывные и даже неограниченные, но интеграл (13) обязательно должен иметь конечное значение.

В данном случае интеграл (13) будет определять числовую характеристику для балок, которую назовем Гильбертовой.

Для шарнирно-опертой балки, загруженной распределенной нагрузкой в (13) нужно подставить $\rho_1(x_i)$ и $\rho_2(x_i)$, по формулам (2) и (3) получим второй инвариант

$$\dot{I}_{2.q} = \int_0^l \frac{2EI}{qx(l-x)} \cdot \frac{qx(l-x)}{24EI}\left(l^2 + lx - x^2\right)dx = \frac{7l^3}{72}. \tag{14}$$

Определим этот инвариант через ρ_1 с максимальным моментом (6), и через ρ_2 с максимальным прогибом (7)

$$\int_0^l \frac{EI_z l^2 \cdot 16x(l-x)\cdot\left(l^2+lx-x^2\right)\cdot f_{\max}}{4M_{\max}x(l-x)}dx = \frac{14}{15}\cdot\frac{EI_z f_{\max} l}{M_{\max}}. \quad (15)$$

Приравняем правые части выражений (15) и (14)

$$\frac{14}{15}\cdot\frac{EI_z f_{\max} l}{M_{\max}} = \frac{7l^3}{72},$$

откуда получаем условие максимумов

$$\frac{f_{\max}}{M_{\max}} = \frac{l^2}{9.6EI_z}. \quad (16)$$

Первый инвариант (5) и второй (14) для одной и той же балки имеют разные значения. Но условия максимумов (9) и (16) получаются одинаковыми.

Приведем еще несколько инвариантов.

Для сосредоточенной силы P приложенной в середине пролета

$$I_{1.p} = \frac{l^2}{12};\ I_{2.p} = \frac{l^3}{9}. \quad (17)$$

$$\frac{f_{\max}}{M_{\max}} = \frac{l^2}{12EI}. \quad (18)$$

При чистом изгибе

$$I_{1.M} = \frac{l^2}{8};\ I_{2.M} = \frac{l^3}{12}. \quad (19)$$

$$\frac{f_{\max}}{M_{\max}} = \frac{l^2}{8EI}. \quad (20)$$

На основании вышеизложенного предлагается методика расчета балок по двум предельным состояниям. Покажем на примере, консольной балки, загруженной силой на конце.

1. Определить $M_{\max}$ и $f_{\max}$

максимальный момент в защемлении $M_{\max} = Pl_k$

максимальный прогиб под силой

$$f_{\max} = \frac{Pl_k^3}{3EI}.$$

2. Определить отношение максимумов

$$\frac{f_{\max}}{M_{\max}} = \frac{l_k^3}{3EI \cdot Pl_k} = \frac{l_k^2}{3EI}.$$

3. Ограничить

$$f_{\max} \le [f]; \; M_{\max} \le RW_x$$

4. Подставить $M_{\max}$ и $f_{\max}$ в п.2.

$$\frac{[f]}{RW_x} = \frac{l_k^2}{3EI}.$$

Используя условие максимумов, можно определить пролет

$$l_k = \sqrt{\frac{3EI_x[f]}{RW_x}};$$

нагрузку

$$P = \sqrt{\frac{3EI_x[f]RW_x}{l_k^4}}\text{; либо } P = \frac{3[f]RI_x}{l_k^3\varepsilon_R},$$

подобрать сечение, и даже материал

Выводы:

1. Первый инвариант определяет гауссову кривизну в данном сечении. Второй инвариант – это интегральная гильбертова характеристика для всей балки.
2. Численное значение инвариантов определяет вид загружения, хотя нагрузка непосредственно не входит.
3. Для практического применения предлагаемой методики необходимо учитывать:
   а) назначение – главная балка или второстепенная;
   б) способ изготовления – прокатная, монолитная, сварная, клееная;
   в) условия работы;
   г) специфические свойства материала – металл, бетон, древесина, пластмасса.

Литература

1. Мандриков. Примеры расчета металлических конструкций. – М. Стройиздат, 1991, - 431с.
2. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1965. - 302с.