УДК 539.3

ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНІ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХОНЬ ІЗ ЗАДАНОЮ ЗМІНОЮ ТЕНЗОРА РІЧЧІ

Вашпанова Н. В.[1], Лесечко О. В.[1], Подоусова Т. Ю.[1]
[1] *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація. У тривимірному евклідовому просторі досліджується задача про існування нескінченно малої деформації першого порядку однозв'язних регулярних поверхонь із заздалегідь заданою зміною тензора Річчі. Показано, що для поверхонь ненульової гауссової кривини ця задача зводиться до дослідження та розв'язування системи семи рівнянь (серед яких є і диференціальні рівняння) відносно семи невідомих функцій, кожний розв'язок якої визначає векторне поле, яке буде однозначною функцією (з точністю до постійного вектора) та який можна інтерпретувати як безмоментний напружений стан рівноваги навантаженої оболонки.

Для регулярних поверхонь ненульових гауссової та середньої кривин поставлена задача зводиться до пошуку розв'язків одного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно двох невідомих функцій. При заданій одній з цих функцій отримане рівняння в загальному випадку буде неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з частинними похідними (неоднорідним диференціальним рівнянням Вейнгартена).

Доведено, що будь-яка регулярна поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин допускає нескінченно малу деформацію першого порядку із заданою зміною тензора Річчі в області достатньо малої міри. Тензорні поля при цьому матимуть представлення через довільну та заздалегідь задану регулярні функції. Розглянувши задачу Неймана отримано, що однозв'язна регулярна поверхня еліптичного типу додатної гауссової та від'ємної середньої кривин з регулярною межею при певній граничній умові допускає в «цілому» нескінченно малу деформацію першого порядку із заздалегідь заданою зміною тензора Річчі. Тензорні поля при цьому будуть визначатися однозначно.

Для поверхонь від'ємної гауссової та ненульової середньої кривин отримане неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку буде гіперболічного типу з відомими коефіцієнтами та правою частиною. Для цього рівняння розглянута задача Дарбу. Доведено, що будь-яка регулярна поверхня від'ємної гауссової та ненульової середньої кривин допускає нескінченно малу деформацію першого порядку із заданою зміною тензора Річчі. Тензорні поля при цьому виражаються через задану функцію двох змінних та через дві довільні регулярні функції однієї змінної.

Ключові слова: нескінченно мала деформація, тензор Річчі, тензорні поля, гауссова кривина, середня кривина.

INFINITESIMAL DEFORMATIONS OF SURFACES WITH A GIVEN CHANGE OF THE RICCI TENSOR

N. Vashpanova[1], O. Lesechko[1], T. Podousova[1]
[1] *Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract. In three-dimensional Euclidean space, we study the problem of the existence of an infinitesimal first-order deformation of single-connected regular surfaces with a predetermined change in the Ricci tensor. It is shown that for surfaces of nonzero Gaussian curvature, this problem is reduced to the study and solution of a system of seven equations (including differential equations) with respect to seven unknown functions, each solution of which determines a vector field that is a univariate function (with an accuracy of a constant vector) and can be interpreted as a moment-free stress state of equilibrium of a loaded shell.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-1-97-109

For regular surfaces of non-zero Gaussian and mean curvatures, the problem is reduced to finding solutions to one second-order partial differential equation with respect to two unknown functions. Given one of these functions, the resulting equation will in general be a nonhomogeneous second-order partial differential equation (nonhomogeneous Weingarten differential equation).

It is proved that any regular surface of positive Gaussian and non-zero mean curvature admits an infinitesimal first-order deformation with a given change in the Ricci tensor in a sufficiently small region. In this case, the tensor fields will be represented by an arbitrary and predefined regular function. By considering the Neumann problem, it is shown that a single-connected regular surface of elliptic type of positive Gaussian and negative mean curvature with a regular boundary under a certain boundary condition admits, in general, an infinitesimal first-order deformation with a predetermined change in the Ricci tensor. In this case, the tensor fields will be determined uniquely.

For surfaces of negative Gaussian and non-zero mean curvature, the resulting inhomogeneous partial differential equation with second-order partial differentials will be of hyperbolic type with known coefficients and right-hand side. The Darboux problem is considered for this equation. It is proved that any regular surface of negative Gaussian and non-zero mean curvature admits an infinitesimal first-order deformation with a given change in the Ricci tensor. Tensor fields are expressed through a given function of two variables and through two arbitrary regular functions of one variable.

Keywords: infinitesimal deformation, Ricci tensor, tensor fields, Gaussian curvature, mean curvature.

V/1/2023
Стор. 96-109 / Page 96-109

1 ВСТУП

Деформація поверхні – це зміна її форми та розмірів, яка пов’язана з переміщенням. Кожна деформація поверхні супроводжується зміною її величин. Кожна геометрична величина, яка характеризує ту чи іншу властивість поверхні, отримує при деформації деякий приріст, який в регулярному випадку можна розкласти за степенями деякого малого параметра. Коефіцієнти цього розкладу називаються відповідно першою, другою і т. д. варіаціями величини.

В даній роботі будемо розглядати нескінченно малі (н. м.) деформації першого порядку поверхонь, при яких перша варіація тензора Річчі заздалегідь задана. Вивчення цих деформацій зводиться до аналізу та розв’язування певних систем рівнянь, які містять також і диференціальні рівняння.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Теорія нескінченно малих деформацій має багату та довгу історію розвитку. В сучасній диференціальній геометрії широко досліджуються різні класи інфінітезимальних деформацій поверхонь трьохвимірного евклідового простору. Фундаментальні результати в цій теорії отримані М. В. Єфімовим, А. В. Погорєловим, І. Н. Векуа. В останні роки стали активно вивчатися спеціальні види нескінченно малих деформацій: конформні, ареальні, геодезичні, зберігаючі головну кривину, зберігаючі середню кривину. Також значна увага приділяється деформаціям n–вимірних поверхонь в n–вимірних просторах. Зауважимо, що результати, отримані для n–вимірних поверхонь, часто відрізняються від результатів теорії нескінченно малих деформацій *три*-вимірних поверхонь. Тому вивчення деформацій поверхонь малих розмірностей не втрачає актуальності.

Вивчення деформацій зводиться до розв’язування рівнянь та систем рівнянь, що призводить до серйозних труднощів технічного характеру. Найчастіше ці системи рівнянь є невизначеними [1]. У зв’язку з цим вводяться додаткові обмеження, які спрощують розв’язування цих систем. А це призводить до спеціалізації деформацій [2-7].

Ми будемо розглядати н. м. деформації першого порядку поверхонь із заздалегідь заданою варіацією тензора Річчі. Результати, отримані в даній роботі, є узагальненням результатів, отриманих в [8].

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є дослідження питання існування н. м. деформацій першого порядку поверхонь, при яких тензор Річчі змінюється за певним правилом.

Об’єктом дослідження є поверхні евклідового простору.

Задача дослідження – дати відповідь на питання: які поверхні та при яких умовах допускають н. м. деформацію першого порядку із заданою зміною тензора Річчі?

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

4.1. Постановка задачі та її математична модель

Нехай у E_3-просторі задана однозв’язна регулярна поверхня S класу C^3 з радіус-вектором

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-1-97-109

$$\bar{r} = \bar{r}\left(x^1, x^2\right) \tag{1}$$

і гомеоморфна області G площини x^1Ox^2.

Будемо розглядати загальну н. м. деформацію першого порядку цієї поверхні з вектором зсуву $\bar{y}\left(x^1, x^2\right) \in C^2$, частинні похідні якого мають вид [8]:

$$\bar{y}_i = c_{i\alpha}\left(T^{\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta}\right)\bar{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha \bar{n}\,. \tag{2}$$

Тут $c_{i\alpha}$ – дискримінантний тензор поверхні S ($c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}$, $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, $g_{\alpha\beta}$ – метричний тензор S), $c^{\alpha\beta} = g^{\alpha i}g^{\beta j}c_{ij}$, g^{ij} – елементи матриці, оберненої до матриці $\left\|g_{\alpha\beta}\right\|$, $\bar{n}$ – одиничний вектор нормалі поверхні S, $\bar{r}_\beta = \partial r / \partial x^\beta$, $T^{\alpha\beta}$, T^α – деякі тензорні поля на поверхні S. Індекси всюди набувають значень 1, 2.

Відомо [8], що існування загальної н. м. деформації першого порядку поверхонь визначається розв'язком наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} T^{\alpha i}_{,\alpha} - b^i_\alpha T^\alpha = \mu_{,\alpha} c^{i\alpha} \\ b^{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = -T^\alpha_{,\alpha} \\ c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0\,, \end{cases} \tag{3}$$

де $b^i_\alpha = g^{\beta i}b_{i\alpha}$, $b_{\alpha\beta}$ – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні S, $\mu(x^1, x^2)$ – деяка функція класу C^2. Комою позначено коваріантне диференціювання на базі $g_{\alpha\beta}$.

Основна система рівнянь загальної н. м. деформації першого порядку поверхонь (3) містить чотири рівняння відносно семи невідомих функцій: $T^{\alpha\beta}, T^\alpha, \mu$. Накладемо на дану деформацію певні обмеження. Припустимо, що при цій деформації варіації тензора Річчі мають вид:

$$\delta R_{ij} = -\Phi_{ij}\,, \tag{4}$$

де Φ_{ij} – заздалегідь задані функції класу C^3.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1. Для того, щоб при н. м. деформації першого порядку поверхонь ненульової гауссової кривини $\left(K \neq 0\right)$ тензор Річчі змінювався згідно (4) необхідно і достатньо щоб виконувалися рівності

$$\left(c_{i\alpha}g_{i\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right)T^{\alpha\beta} = \frac{1}{K}\Phi_{ij} - \frac{1}{2K}g_{ij}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}\,. \tag{5}$$

Доведення.

Необхідність. Шляхом варіювання рівності $R_{ij} = -Kg_{ij}$, знайдемо варіацію тензора Річчі

$$\delta R_{ij} = -g_{ij}\delta K - 2K\varepsilon_{ij}\,, \tag{6}$$

де

$$2\varepsilon_{ij} = \delta g_{ij} = \left(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right)T^{\alpha\beta} - 2\mu g_{ij} \tag{7}$$

варіації матричного тензора [8].

Порівнюючи рівності (4) та (6), отримаємо

$$g_{ij}\delta K + 2K\varepsilon_{ij} = \Phi_{ij}\,. \tag{8}$$

Згорнемо (8) по g^{ij}:

$$g_{ij}g^{ij}\delta K + 2Kg^{ij}\varepsilon_{ij} = g^{ij}\Phi_{ij}\,.$$

Оскільки $g_{ij}g^{ij} = 2,\ g^{ij}\varepsilon_{ij} = -2\mu$, то попередні рівності набудуть вигляду

$$\delta K = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} + 2K\mu\,. \tag{9}$$

Підставимо (9) та (7) в рівності (8) і отримаємо (5).

Достатність. Із виконання рівностей (5) згідно (9) із (6) отримаємо (4):

$$\delta R_{ij} = -g_{ij}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} + 2K\mu\right) - K\left[\left(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right)T^{\alpha\beta} - 2\mu g_{ij}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}g_{ij}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} - 2Kg_{ij} + 2K\mu g_{ij} - K\left(\frac{1}{K}\Phi_{ij} - \frac{1}{2K}g_{ij}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}\right) = -\Phi_{ij}.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Для існування н. м. деформації першого порядку ненульової гауссової кривини із заздалегідь заданою зміною тензора Річчі (4) необхідно і достатньо щоб наступна система рівнянь

$$\begin{cases} T^{\alpha i}_{,\alpha} + \mu_\alpha c^{\alpha i} = b^i_\alpha T^\alpha, \\ b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = -T^\alpha_{,\alpha}\,, \\ c_{\beta\alpha}T^{\alpha\beta} = 0\,, \\ \left(c_{i\alpha}g_{i\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right)T^{\alpha\beta} = B_{ij}\,, \end{cases} \tag{10}$$

мала ненульовий розв’язок відносно симетричного тензора $T^{\alpha\beta}$, компонентів вектора T^α та функції $\mu\left(x^1, x^2\right) \in C^2$.

Тут

$$B_{ij} = \frac{1}{K}\Phi_{ij} - \frac{1}{2K}g_{ij}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}\,. \tag{11}$$

Доведення випливає з теореми 1 та системи рівнянь (3).

Слід зазначити, що кожний розв’язок системи рівнянь (10) визначає н. м. деформацію поверхні S ненульової гауссової кривини з наперед заданими варіаціями тензора Річчі, яку можна інтерпретувати як безмоментний напружений стан рівноваги навантаженої оболонки [8]. Якщо вектор зсуву $\bar{y} = const$, то поверхню S називатимемо жорсткою по відношенню до даної н. м. деформації.

Отже, задача про існування н. м. деформацій поверхонь ненульової гауссової кривини, при якій тензор Річчі змінюється згідно (4), звелась до пошуку розв’язків системи рівнянь (10).

4.2. Зведення задачі до розв’язання одного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-1-97-109

Із (10) розглянемо наступну алгебраїчну систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = -T^{\alpha}_{,\alpha} \\ \left(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right)T^{\alpha\beta} = B_{ij} \,, \end{cases}$$

яка в розгорнутому виді запишеться так:

$$\begin{cases} b_{11}T^{11} + 2b_{12}T^{12} + b_{22}T^{22} = -T^{\alpha}_{,\alpha} \\ g_{22}T^{22} - g_{11}T^{11} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}B_{12} \\ g_{11}T^{12} + g_{12}T^{22} = \dfrac{1}{2\sqrt{g}}B_{11} \\ g_{12}T^{11} + g_{22}T^{12} = \dfrac{1}{2\sqrt{g}}B_{22} \,. \end{cases} \tag{12}$$

Розглянемо спочатку перші три рівняння цієї системи. Складемо та обчислимо головний визначник такої системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & 2b_{12} & b_{22} \\ -g_{11} & 0 & g_{22} \\ 0 & g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} = -2Hg\,g_{11} \,.$$

Нехай середня кривина поверхні $H \neq 0$. Тоді $\Delta \neq 0$.

За правилом Крамера знаходимо розв'язок цієї системи

$$\begin{cases} T^{11} = -\dfrac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}g^{11} + A \\ T^{12} = -\dfrac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}g^{12} + B \\ T^{22} = -\dfrac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}g^{22} + C \,, \end{cases} \tag{13}$$

де

$$A = \frac{B_{11}b_{12}g_{22} - B_{12}\left(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22}\right)}{-2Hg\sqrt{g}\,g_{11}} \,,$$

$$B = \frac{2B_{12}b_{11}g_{12} - B_{11}\left(b_{11}g_{22} + g_{11}b_{22}\right)}{-2Hg\sqrt{g}\,g_{11}} \,,$$

$$C = \frac{B_{11}b_{12}g_{11} - B_{12}b_{11}g_{11}}{-2Hg\sqrt{g}\,g_{11}} \,,$$

причому $A, B, C-$ відомі функції точки поверхні.

Підставимо (13) в четверте рівняння системи (12). В результаті отримаємо рівність

$$g^{ij}B_{ij} = 0 \,,$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-1-97-109

яку також можна отримати при множенні (11) на g^{ij}. Це означає, що знайдений розв'язок (13) задовольняє систему рівнянь (12).

Введемо до розгляду новий тензор

$$\tilde{T}^{ij} = T^{ij} + \frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H} g^{ij}. \tag{14}$$

Тоді система рівнянь (10) набуде вигляду

$$\begin{cases} \tilde{T}^{\alpha i}_{,\alpha} - \left(\dfrac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}\right)_{\beta} g^{\beta i} + \mu_{\alpha} c^{\alpha i} = b^{i}_{\alpha} T^{\alpha} \\ b_{\alpha\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta} = 0 \\ \tilde{T}^{11} = A,\ \tilde{T}^{12} = B,\ \tilde{T}^{22} = C. \end{cases} \tag{15}$$

Нехай

$$\varphi = -\frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}. \tag{16}$$

Згідно (16) перше рівняння системи (15) запишеться так:

$$b^{i}_{\alpha} T^{\alpha} = \tilde{T}^{\alpha i}_{,\alpha} + \varphi_{\beta} g^{\beta i} + \mu_{\alpha} c^{\alpha i}.$$

Помножимо отримані рівності на d^{k}_{i} − елементи матриці, оберненої до $\left\| b^{\beta}_{\alpha} \right\|$.

Внаслідок рівностей

$$b^{\beta}_{k} d^{k}_{\beta} = \delta^{k}_{\alpha} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } k = \alpha \\ 0, \text{ якщо } k \neq \alpha \end{cases}$$

$$g^{\beta i} d^{k}_{i} = d^{\beta k},\ d^{\beta k} = \frac{1}{K} c^{\beta i} c^{kj} b_{ij}$$

будемо мати

$$T^{k} = \tilde{T}^{\alpha i}_{,\alpha} d^{k}_{i} + \varphi_{\beta} d^{\beta k} + \mu_{\alpha} c^{\alpha i} d^{k}_{i}. \tag{17}$$

Обчислимо коваріантну похідну від T^{k}:

$$T^{k}_{,k} = \left(\tilde{T}^{\alpha i}_{,\alpha} d^{k}_{i}\right)_{,k} + \varphi_{\beta,k} d^{\beta k} + \varphi_{\beta} d^{\beta k}_{,k} + (\mu_{\alpha} c^{\alpha i} d^{k}_{i}), \kappa.$$

Підставимо її вираз в (16). В результаті отримаємо

$$\left(d^{\beta\alpha}\varphi_{\beta}\right)_{,\alpha} + \varphi_{\beta} d^{\beta\alpha}_{,\alpha} + 2H\varphi = \mu_{\alpha,\beta} c^{i\alpha} d^{\beta}_{i} + \mu_{\alpha} c^{i\alpha} d^{j}_{i,j} - \left(\tilde{T}^{\alpha i}_{,\alpha} d^{\beta}_{,i}\right)_{,\beta}.$$

Звільнившись від коваріантних похідних, останньому рівнянню можна надати наступний вид:

$$d^{\beta\alpha}\varphi_{\beta\alpha} + \left(d^{\beta\alpha}_{,\alpha} - \Gamma^{\beta}_{sk} d^{s\alpha}\right)\varphi_{\beta} + 2H\varphi = \mu_{\alpha\beta}\left(c^{i\alpha} d^{\beta}_{i}\right) + \left(c^{i\alpha} d^{\beta}_{i,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{s\beta} c^{is} d^{\beta}_{i}\right)\mu_{\alpha} - \left(\tilde{T}^{\alpha i}_{,\alpha} d^{\beta}_{i}\right)_{,\beta}, \tag{18}$$

V/1/2023
Стор. 96-109 / Page 96-109

де Γ_{ij}^{k} − символи Христофеля другого роду, $\varphi_{\alpha\beta} = \partial^2\varphi / \partial x^\alpha \partial x^\beta$.

Отже, пошук розв’язків системи рівнянь (10) зводиться до дослідження та розв’язування одного диференціального рівняння виду (18) відносно функцій $\mu\left(x^1, x^2\right)$ та $\varphi\left(x^1, x^2\right)$.

4.3. Про існування н. м. деформацій деяких поверхонь із заздалегідь заданою зміною тензора Річчі

Нехай $S \in C^{4,\alpha}$ − поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин, гомеоморфна області G площини x^1Ox^2, яка обмежена кривою $\partial G \in C^{1,\alpha}$ $\left(0 < \alpha \le 1\right)$ та з радіус-вектором виду (1). Позначення класів функцій запозичені в [9].

Припустимо, що $\mu(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}$ є заздалегідь заданою функцією. Тоді (18) в загальному вигляді є неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними (неоднорідне рівняння Вейнгартена [8]) відносно функції $\varphi\left(x^1, x^2\right)$:

$$d^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} + e^\alpha\varphi_\alpha + 2H\varphi = F\left(\mu, \Phi^{\alpha\beta}\right) \tag{19}$$

де $F\left(\mu, \Phi^{\alpha\beta}\right) = c^{i\alpha}d_i^\beta\mu_{\alpha\beta} + \left(\left(c^{ik}d_i^\beta\right)_{,\beta} - \Gamma_{s\beta}^{\alpha}c^{is}d_i^\beta\right)\mu_\alpha - \left(\tilde{T}_{,\alpha}^{\alpha i}d^{i\beta}\right)_{,\beta}$,

$$e^\alpha = c^{i\alpha}d_{i,\beta}^\beta - \Gamma_{s\beta}^{\alpha}c^{is}d_i^\beta .$$

Тоді $e^\alpha, d^{\alpha\beta}, H \in C^{2,\alpha}\left(\bar{G}\right)$ і функція $F\left(\mu, \Phi^{\alpha\beta}\right) \in C^{1,\alpha}\left(\bar{G}\right)$ є відомими функціями точки поверхні S.

Легко впевнитися в тому, що дискримінант рівняння (19)

$$\Delta = \frac{1}{gK} .$$

Отже, у випадку, коли $K > 0$ в області $\bar{G}$ рівняння (19) задовольняє умову рівномірної еліптичності $\left(\Delta > \Delta_0 > 0,\ \Delta_0 = const\right)$. Тоді на поверхні S існує ізометрична параметризація [9], відносно якої (19) набуде канонічного виду в G:

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + m\varphi_1 + l\varphi_2 + p\varphi = f\left(\mu, \Phi^{\alpha\beta}\right). \tag{20}$$

Тут

$$f\left(\mu, \Phi^{\alpha\beta}\right) = \frac{Kg}{b_{22}}F\left(\mu, \Phi^{\alpha\beta}\right) ,$$

$$m = \frac{Kg}{b_{22}}\left(d_{,\alpha}^{1\alpha} - \Gamma_{s\alpha}^{1}d^{s\alpha}\right),$$

$$l = \frac{Kg}{b_{22}}\left(d_{,\alpha}^{2\alpha} - \Gamma_{s\alpha}^{2}d^{s\alpha}\right), \quad p = 2Hb_{22} .$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. Будь-яка поверхня $S \in C^{4,\alpha}$ додатної гауссової та ненульової середньої кривин допускає н. м. деформацію першого порядку, при якій тензор Річчі змінюється згідно (4) в області достатньо малої міри. Тензорні поля при цьому матимуть

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-1-97-109

представлення через довільну функцію $\omega\left(x^1,x^2\right)\in C^{3,\alpha}\left(\overline{G}\right)$ та заздалегідь задану функцію $\mu\left(x^1,x^2\right)\in C^{3,\alpha}$.

Доведення. Оскільки $S\in C^{4,\alpha}$, то коефіцієнти рівняння (20) m, l, p та функція f належить класу $C^{3,\alpha}$. Це означає, що в області, достатньо малої міри, що входить в ***G***, рівняння (20) має розв'язок [11], який залежить від довільної функції $\omega(x^1,x^2)\in C^{3,\alpha}$.

Із рівностей (13) внаслідок (16) знайдемо тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, а компоненти контраваріантного вектора T^{α} набудуть виду (17).

Тоді безпосередньо із (2) отримаємо вектор зсуву $\overline{y}\left(x^1,x^2\right)$, який визначається однозначно (з точністю до сталого вектора) [8].

Теорему доведено.

Слід зазначити наступне:

- остання теорема узагальнює результат, отриманий для поверхонь додатної гауссової та ненульової середньої кривин із збереженням тензора Річчі при н. м. деформації першого порядку [8];
- поверхня, у якої $K>0,\ H\neq 0$ буде жорсткою по відношенню до даних деформацій тільки у випадку,коли $\mu=0,\ \varphi=0,\ \Phi^{\alpha\beta}=0$ [8].

4.4. Задача Неймана для однозв'язної поверхні

Для рівняння (19) розглянемо задачу Неймана [10] з граничною умовою

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{n}}+\sigma\left(x^1,x^2\right)\varphi=0 \quad \text{на} \quad \partial G\in C^{1,\alpha},$$

де $\sigma\left(x^1,x^2\right)$ – задана неперервна функція класу $C^{2,\alpha}\left(\partial G\right)$, $\partial\varphi/\partial\overline{n}$ – похідна функції φ в напрямку внутрішньої нормалі поверхні *S*.

Враховуючи геометричний зміст функції $\varphi\left(x^1,x^2\right)$ [8]:

$$\varphi=\frac{c^{\alpha\beta}\overline{r}_{\beta}\left(\delta n\right)_{,\alpha}}{2H}$$

попередня гранична умова набуде такого виду:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{2H}c^{\alpha\beta}\overline{r}_{\beta}\left(\delta n\right)_{\alpha}\right)}{\partial\overline{n}}+\frac{\sigma\left(x^1,x^2\right)}{2H}c^{\alpha\beta}\overline{r}_{\beta}\left(\delta n\right)_{\alpha}=0 \tag{21}$$

на ∂G.

Тоді у випадку $H<0$ задача Неймана (19), (21) має єдиний розв'язок $\varphi\left(x^1,x^2\right)$ для функції $F\in C^2$ [10].

Отже, ми отримали наступний результат.

Теорема 4. Нехай *S*– поверхня еліптичного типу класу $C^{4,\alpha}$ додатної гауссової та від'ємної середньої кривини з межею $\partial S\in C^{2,\alpha}$. Тоді при граничній умові виду (21) поверхня *S* в «цілому» допускає н. м. деформацію першого порядку із заданою зміною тензора Річчі (4). Тензорні поля при цьому будуть визначені однозначно.

4.5. Задача Дарбу для однозв'язної поверхні

Припустимо тепер, що поверхня $S \in C^4$ від'ємної гауссової і ненульової середньої кривин. Тоді рівняння (19) буде неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку гіперболічного типу з відомими коефіцієнтами та правою частиною.

Віднесемо поверхню S до асимптотичних ліній $\left(b_{11}=b_{22}=0,\ b_{12}\neq 0\right)$.

Тоді рівняння (19) набуде наступного канонічного виду:

$$\varphi_{12}+a\varphi_1+m\varphi_2+c\varphi=\frac{Kg}{b_2}F\left(\mu,\Phi^{\alpha\beta}\right), \tag{22}$$

де

$$a=\frac{Kg}{b_{12}}\left(d^{1\alpha}_{,\alpha}-\Gamma^1_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta}\right),\ m=\frac{Kg}{b_{12}}\left(d^{2\alpha}_{,\alpha}-\Gamma^2_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta}\right),\ \ c=2Hb_{12}.$$

Для рівняння (22) розглянемо задачу Дарбу [12] відносно функції $\varphi\left(x^1,x^2\right)$. Якщо будемо шукати такий інтеграл, який набуває певних значень на характеристиках $x_1=x_0^1,\ x_2=x_0^2$

$$\varphi\left(x^1,x_0^2\right)=\lambda\left(x^1\right),\ \ \varphi\left(x_0^1,x^2\right)=\tau\left(x^2\right),$$

то кожній парі функцій $\lambda\left(x^1\right),\tau\left(x^2\right)$, відповідає єдиний розв'язок $\varphi\left(x^1,x^2\right)$ рівняння (22) для даної правої частини [12].

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 5. Будь-яка поверхня $S\in C^4$ від'ємної гауссової та ненульової середньої кривин допускає н. м. деформацію із заздалегідь заданою зміною тензора Річчі (4). Тензорні поля $T^{\alpha\beta},T^{\alpha}$ при цьому виражаються через задану функцію двох змінних класу C^3 та через дві довільні функції класу C^2, кожна з яких – від однієї змінної.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

В якості прикладу розглянемо сферу радіуса R, рівняння якої має вид:

$$\overline{r}=\left(\frac{2Rx}{1+x^2+y^2};\ \frac{2Ry}{1+x^2+y^2};\ \frac{R\left(1-x^2-y^2\right)}{1+x^2+y^2}\right).$$

Варіації тензора Річчі задамо наступним чином

$$\Phi_{11}=\frac{4\left(x^2-y^2\right)}{R\left(1+x^2+y^2\right)^4};\ \ \Phi_{22}=\frac{12\left(x^2-y^2\right)}{R\left(1+x^2+y^2\right)^4};\ \ \Phi_{12}=\Phi_{21}=-\frac{8xy}{R\left(1+x^2+y^2\right)^4}. \tag{23}$$

Оскільки

$$g_{11}=g_{22}=\sqrt{g}=\frac{4R^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2};\ g_{12}=0;\ \ b_{11}=b_{22}=\frac{4R}{\left(1+x^2+y^2\right)^2};\ b_{12}=0;$$

$$\Gamma_{11}^{1}=\Gamma_{12}^{1}=-\Gamma_{22}^{1}=-\frac{2x}{1+x^2+y^2};\ \Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{22}^{2}=-\Gamma_{11}^{2}=-\frac{2y}{1+x^2+y^2};$$

$$K=\frac{1}{R^2};\ H=\frac{1}{R}.$$

З урахуванням (11) отримаємо вирази функції

$$A=-\frac{\Phi_{12}b_{22}}{2HKg\sqrt{g}};\ B=\frac{b_{11}\left(\Phi_{11}-\Phi_{22}\right)}{2HKg\sqrt{g}};\ C=\frac{\Phi_{12}b_{11}}{2HKg\sqrt{g}}.$$

Згідно (23), тензорні поля $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ матимуть представлення

$$\tilde{T}^{11}=-\tilde{T}^{22}=-\frac{xy}{4R^3};\ \tilde{T}^{12}=-\frac{\left(x^2-y^2\right)}{8R^3}.$$

Нехай $\mu=C=const$.

Тоді рівняння (19) для сфери запишеться так:

$$\varphi_{11}+\varphi_{22}+\frac{4m\left(m+1\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\varphi=0, \tag{24}$$

де $m=1$.

Відомо [13], що будь-який розв’язок рівняння (24) має представлення через функцію Рімана. Один із напрямних косинусів нормалі сфери співпадає з функцію Рімана, тобто один з його розв’язків буде дорівнювати нулю: $\varphi=0$.

В якості області $\overline{G}$ для рівняння (24) можна взяти будь-яку однозв’язну область, розташовану всередині круга $x^2+y^2=1$.

Із рівностей (17) знаходимо компоненти T^{α}:

$$T^1=\frac{y\left(1-x^2-y^2\right)}{2R^2\left(1-x^2-y^2\right)};\ \ T^2=-\frac{x\left(1-x^2-y^2\right)}{2R^2\left(1-x^2-y^2\right)},$$

Слід зазначити, що $T^{\alpha}_{,\alpha}=0$.

Із (14) випливає, що тензорні поля $T^{\alpha\beta}$ матимуть вид:

$$T^{11}=-T^{22}=-\frac{xy}{4R^3};\ \ T^{12}=-\frac{x^2-y^2}{8R^3}.$$

Тоді з рівностей (3) знайдемо вектор зсуву $\overline{y}\left(x^1,x^2\right)$ в явному виді

$$y=\left(\frac{x\left(x^2+y^2\right)-2CRx\left(1+x^2+y^2\right)^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^3};\ \frac{y\left(x^2+y^2\right)-2CRy\left(1+x^2+y^2\right)^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^3};\right.$$
$$\left.\frac{1+x^2+y^2+2\left(x^2+y^2\right)^2-2CR\left(1-x^2-y^2\right)\left(1+x^2+y^2\right)^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^3}\right). \tag{25}$$

Отже, сфера допускає н. м. деформації з заданими варіаціями тензора Річчі, вектор зсуву якої має вид (25).

6 ВИСНОВКИ

Отримані результати мають теоретичний і практичний характер. Вони можуть бути використані в теорії н. м. деформацій поверхонь, а також їх можна застосувати в безмоментній теорії тонких пружних оболонок при розрахунках їх рівноваги.

Література

1 Podousova T., Vashpanova N. About the existence of ovaloid deformations. Proceedings of the International Geometry Center. 2020. 13 (1). 23–34. https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1709.
2 Vashpanova N., Savchenko A., Vasylieva N. Generalized φ(Ric)-vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. Proceedings of International Geometry Center. 2021. 14 (4). 1–12. https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2155.
3 Кіосак В. А., Лесечко О. В. Моделі механічних систем, що зберігають тензор Вейля. Механіка та математичні методи, 2019. №1. С. 25–34. https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-25-34.
4 Vashpanova N., Podousova T., Fedchenko Yu. Canonikal deformations of pseudo-Riemanni spases. AIP Conference Proceedings. 2019. 2164. 040005. https://doi.org/10.1063/1.5130797.
5 Podousova T., Ugol'nikov A., Dumanska V. Infinitesimally small deformation which preserves geodesic lines. AIP Conference Proceedings. 2020. 2302. 040007. https://doi.org/10.1063/5.0033749.
6 Гаврильченко М. Л., Киосак В. А., Микеш Й. Геодезические деформации гиперповерхностей римановых пространств. Известия высш. учебн. Завед, 2004. №11 (510). С. 23–29.
7 Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С. QA-деформація поверхні від'ємної гауссової кривини. Дослідження в математиці і механіці, 2018. т. 23. 1 (31). С. 14–22.
8 Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В. Деформації поверхонь зі стаціонарним тензором Річчі. Механіка та математичні методи. 2020. Т. 2. Вип. 2. С. 51–62. https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-51-62.
9 Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М: Наука, 1988. 509 с.
10 Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М: Наука, 1976. 392 с.
11 Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.:ИЛ, 1956. 256 с.
12 Кошляков Н. С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособ. для мех.-мат. фак. ун-тов. М: «Высшая школа», 1970. 712 с.
13 Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М: Наука, 1982. 288 с.

References

1. Podousova, T., Vashpanova, N. (2020). About the existence of ovaloid deformations. *Proceedings of the International Geometry Center*. 13 (1). 23–34. https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1709.
2. Vashpanova, N., Savchenko, A., Vasylieva, N. (2021). Generalized φ(Ric)-vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of International Geometry Center*. 14 (4). 1–12. https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2155.
3. Kiosak, V., Lesechko, O. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 1. 25–34. https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-25-34.
4. Vashpanova, N., Podousova, T., Fedchenko, Yu. (2019) Canonikal deformations of pseudo-Riemanni spases. *AIP Conference Proceedings*. 2164. 040005. https://doi.org/10.1063/1.5130797.

5. Podousova, T., Ugol'nikov, A., Dumanska, V. (2020). Infinitesimally small deformation which preserves geodesic lines. *AIP Conference Proceedings*. 2020. 2302. 040007. https://doi.org/10.1063/5.0033749.
6. Gavrilchenko, M. L., Kiosak, V. A., Mikesh, J. (2004). Heodezycheskye deformatsyy hyperpoverkhnostei rymanovykh prostranstv [Geodesic deformations of hypersurfaces of Riemannian spaces]. *News of higher educational institutions*. 11 (510). 23–29. [in Russian].
7. Bezkorovaina, L. L., Khomych, Y. S. (2018). QA-deformatsiia poverkhni vidiemnoi haussovoi kryvyny [QA-deformation of a surface of negative Gaussian curvature]. *Research in Mathematics and Mechanics*. 23. 1(31). 14–22. [in Ukranian].
8. Podousova, T., Vashpanova N. (2020). Deformations of surfaces from stationary Ricci tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 2 (2). 51–62. https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-51-62.
9. Vekua, I. N. (1988). *Obobshchennye analytycheskye funktsyy* [Generalized analytical functions]. M: Nauka. [in Russian].
10. Mikhailov, V. P. (1976). *Dyfferentsyalnye uravnenyia v chastnykh proyzvodnykh* [Differential equations in partial differentials]. M: Nauka. [in Russian].
11. Miranda, K. (1956). *Uravnenyia s chastnymy proyzvodnymy ellyptycheskoho typa*. [Partial differential equations of elliptic type]. M: IL. [in Russian].
12. Koshlyakov, N. S. et al. (1970). *Uravnenyia v chastnykh proyzvodnykh matematycheskoi fyzyky* [Partial differential equations of mathematical physics]. Textbook for meh.-mat. faculties of universities. M: «Vysshaya shkola». [in Russian].
13. Vekua, I. N. (1982). *Nekotorye obshchye metody postroenyia razlychnykh varyantov teoryy obolochek* [Some general methods for constructing various variants of the theory of shells]. M: Nauka. [in Russian].

Вашпанова Ніна Володимирівна
Одеська державна академія будівництва та архітектури
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
vashanina@ukr.net
ORCID: 0000-0002-8639-8368
Лесечко Олександр Васильович
Одеська державна академія будівництва та архітектури
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
a.lesechko@ukr.net
ORCID: 0000-0002-2352-6174
Подоусова Тетяна Юріївна
Одеська державна академія будівництва та архітектури
к.ф.-м. н., доцент
вул.Дідріхсона, 4, Одеса,Україна, 65029
podousova_tatyana@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9492-126X

Для посилань:
Вашпанова Н. В., Лесечко О. В., Подоусова Т. Ю. Інфінітезимальні деформації поверхонь
із заданою зміною тензора Річчі. Механіка та математичні методи, 2023. Т. V. №. 1. С. 97–109.

For references:
Vashpanova N., Lesechko O., Podousova T. (2023). Infinitesimal deformations of surfaces with a given change of the Ricci tensor. Mechanics and Mathematical Methods. V(1). 97–109.