

УДК 531.381

ЕВОЛЮЦІЯ РУХУ ДИНАМІЧНО СИМЕТРИЧНОГО ГІРОСТАТА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ

Лещенко Д.Д.¹, Козаченко Т.О.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація. Задачі динаміки твердих тіл, які мають порожнини з рідиною, привертають велику увагу. Інтерес до цих задач зріс у зв'язку з розвитком космічної техніки. Аналогічні задачі мають місце також в теорії руху літака і корабля, а також в інших технічних питаннях. Ці задачі мають і принципове теоретичне значення. Необхідність дослідження задач динаміки твердого тіла з порожниною, яка містить в'язку рідину, пов'язана з дослідженнями руху космічного апарата навколо центра мас та в задачах їх орієнтації та стабілізації. Задачі динаміки твердого тіла з порожнинами, що містять в'язку рідину, є більш складними, ніж у випадку з ідеальною рідиною. В роботах Ф. Л. Черноуська показано, що розв'язування задач динаміки твердого тіла з в'язкою рідиною в порожнині можна розділити на дві частини: гідродинамічну та динамічну, що дозволяє спростити початкову задачу. Моменти сил в'язкої рідини в порожнині, які діють на тверде тіло, часто є відносно малими та можуть розглядатися як збурення. Природно застосовувати методи малого параметра для аналізу динаміки твердого тіла під дією прикладених моментів. У цій статті застосовується метод асимптотичного усереднення Крилова-Боголюбова.

При визначенні фактичної орієнтації штучного супутника Землі була відмічена мала зміна модуля вектора кінетичного моменту супутника на ділянці польоту з вимкненою системою орієнтації. Ця зміна була пояснена присутністю малого моменту збурення, який є постійним в зв'язаній з супутником системі координат. У випадку малих моментів сил можна застосовувати методи збурень для визначення аналітичних або чисельних описів руху.

В цій роботі розглядається рух відносно центра мас динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією постійного моменту в зв'язаних з тілом осях. Визначення моментів сил, які діють на тіло зі сторони в'язкої рідини в порожнині, було запропоновано в роботах Ф. Л. Черноуська. Отримано систему рівнянь в стандартній формі. Одержані чисельні розв'язки задач описують еволюцію руху твердого тіла під дією малих внутрішніх та зовнішніх моментів сил.

Ключові слова: тверде тіло, порожнина, в'язка рідина, постійний момент.

EVOLUTION OF DYNAMICALLY SYMMETRIC GYROSTAT MOTION UNDER THE ACTION OF CONSTANT TORQUE

D. Leshchenko¹, T. Kozachenko¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract. Problems of the dynamics of rigid bodies containing a fluid have attracted a great deal of attention. Interest in these problems has grown in connection with the development of space technology. Similar problems also arise in the theory of aircraft and ship and in other technical questions. These problems are also of major theoretical interest. There is a necessity to study the problems of the rigid body dynamics with cavities containing a viscous fluid to calculate the motion of spacecraft about its center of mass as well as their orientation and stabilization. The problems of rigid body dynamics with cavities containing a viscous fluid are more difficult than in the case of ideal fluid. The studies of F. L. Chernousko showed that solving the problems of the rigid body dynamics with viscous fluid in cavity can be separated into two parts: the hydrodynamic and dynamic ones, which represent a simplification of the original problem. The torques of viscous fluid in cavity forces, acting on the body, are often relatively small and can be considered as perturbations. It is natural to use the



methods of small parameter to analyze the dynamics of rigid body under the action of applied torques. The method applied in this paper is the Krylov-Bogolubov asymptotic averaging method.

Reference was made to the angular momentum vector of a satellite, noted during the determination of the actual orientation of the artificial earth satellite. This change was explained as a result of the presence of a the small perturbation torque, which is constant in fixed axes relative to the satellite. In the case of small torques, it is possible to use perturbation methods to obtain analytical or numerical descriptions of motion.

In this paper, the motion about the center of mass of a dynamically symmetric rigid body with a cavity filled with a fluid of high viscosity and subjected to constant body-fixed torque is considered. The torque of forces acting on the rigid body by the viscous fluid in the cavity is determined by the technique developed in the works of F. L. Chernousko. We obtain the system of motion equations in the standard form. Obtained numerical solutions describe the evolution of rigid body motion under the action of small internal and external torques.

Keywords: rigid body, cavity, viscous fluid, constant torque.

1 ВСТУП

Під час руху космічного апарата відносно центра мас, на нього діють моменти сил різної природи, ці рухи можуть бути зумовленими наявністю рідкого палива в порожнинах тіл. Велика кількість рідини в космічних апаратах може в певних випадках суттєво вплинути на рух цих тіл.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблема динаміки твердого тіла з порожниною, яка містить в'язку рідину, значно складніша, ніж з ідеальною рідиною. Найбільш загальні результати розв'язання цих задач були одержані Ф. Л. Черноусько [1, 2]. У цих роботах розглядалася модель, в якій вплив рідини на параметри руху зводився до наявності додаткових збурюючих моментів в рівняннях руху Ейлера для твердого тіла.

В ряді робіт [3–6] досліджено рух твердого тіла з порожниною. В статті [3] асимптотичним методом досліджується рух твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою в'язкою рідиною. В [4–6] розглядаються швидкі обертальні рухи відносно центра мас динамічно несиметричного супутника з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією гравітаційного та світлового моментів сил. В статті [7] проведено чисельний аналіз зміни вектора кінетичного моменту твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. В [8] представлені аналітичні та чисельні результати, одержані під час дослідження руху твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. В роботі [9] запропоновано підхід для моделювання динаміки твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості. В [10] досліджені рівняння руху системи твердих тіл з порожнинами, заповненими в'язкою рідиною. В статті [11] вивчається оптимальне гальмування обертань симетричного тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, в середовищі з опором.

Задача квазіоптимального за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного тіла із сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, досліджувалась у [12]. Також в цій роботі на тверде тіло діє невеликий дисипативний момент сил лінійного опору середовища та рухома маса, з'єднана з тілом сильним демпфером. У статті [14] випадок руху твердого тіла, вивчений у [13], був розширений за наявності третьої складової гіростатичного моменту. У [15] досліджено рух близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості.

В роботах [16–19] були знайдені аналітичні розв'язки задачі про рух симетричного твердого тіла, близького до динамічного симетричного, а також несиметричного тіла під дією моменту, який є постійним в зв'язаних з тілом осях. В [20] вивчається рух відносно центра мас несиметричного твердого тіла під дією двох малих збурюючих моментів: постійного в зв'язаних з тілом осях та дисипативного квадратично залежного від кутової швидкості тіла. В статті [21] досліджується рух навколо центра мас близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією постійного моменту.

Розглянемо тривимірний рух динамічно симетричного твердого тіла з в'язкою рідиною відносно центра мас. Тензор $\mathbf{P} = (P_{ij})$ має вигляд $P_{ij} = P_0 \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера, $P_0 > 0$ скалярний коефіцієнт, у випадку сферичної порожнини радіуса b значення $P_0 = 8\pi b^7 / 525$ [1, 2]. Позначимо, через A і C головні центральні моменти інерції системи та p , q , r – проекції абсолютної кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ на відповідні головні центральні осі інерції.

Вважаємо, що постійний момент в зв'язаних з тілом осях має вигляд

$$M_i^c = \varepsilon^2 M_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де $0 < \varepsilon \ll 1$ малий параметр.

Запишемо рівняння руху тіла з рідиною в проекціях на головні осі інерції у вигляді [1, 2]:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr &= \frac{\rho P_0}{\nu A^2} C(A - C)pr^2 + \varepsilon M_1; \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= \frac{\rho P_0}{\nu A^2} C(A - C)qr^2 + \varepsilon M_2; \\ C \frac{dr}{dt} &= \frac{\rho P_0 r}{\nu A} (C - A)(p^2 + q^2) + \varepsilon M_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут p, q, r – проекції кутової швидкості ω на головні центральні осі інерції, ρ – густина рідини, ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини. Перші вирази в правих частинах рівностей (1) визначають в асимптотичному наближенні момент сил в'язкої рідини в порожнині твердого тіла [1, 2].

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Число Рейнольдса припускається малим: $Re = l^2 T_*^{-1} \nu^{-1} \ll 1$ [1, 2]. Тут l – характерний лінійний розмір порожнини, T_* – характерний масштаб часу відносного руху, обернено пропорційний характерній кутовій швидкості ω . Якщо l і T_* приймаються за одиниці виміру довжини і часу, то кінематичний коефіцієнт в'язкості – великий параметр [1, 2], $\nu = 1/Re \gg 1$ і $\nu^{-1} \ll 1$. Будемо вважати, що безрозмірний параметр $\nu^{-1} \sim \varepsilon$.

Коли $\varepsilon = 0$, $\nu^{-1} = 0$ система (2) інтегрується в явному вигляді, при цьому $r = r_0$. Припустимо, що $r_0 \neq 0$. Тоді змінні p, q здійснюють гармонічні коливання з частотою $|(C - A)r_0|$, яка залежить від r_0 . Тому система рівнянь (3) відноситься до суттєво нелінійних.

Застосуємо загальний породжувальний розв'язок системи (2) [22]

$$p = a \cos \varphi, \quad q = a \sin \varphi, \quad r = r_0, \quad (4)$$

в якості перетворювання до змінних a, r , де $a > 0$, $a = \text{const}$, $\varphi = r(C - A)A^{-1}t$.

Підставимо (4) в третє рівняння (2), враховуючи, що $a^2 = p^2 + q^2$ і $\dot{a} = \dot{p} \cos \varphi + \dot{q} \sin \varphi$. Проводимо усереднення одержаного рівняння для a за фазою φ [23] і представимо рівняння для r у вигляді (крапка – похідна за часом t):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\rho P_0}{\nu A^3} C(C - A)r^2 a; \\ \dot{r} &= \frac{\rho P_0}{\nu AC} (C - A)a^2 r - \varepsilon \frac{M_3}{C}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вирази M_1, M_2 зникають при усередненні. За допомогою заміни змінних $x = a^2$, $y = r^2 > 0$, $r = \sqrt{y}$ приведемо (5) до наступної системи:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2\rho P_0}{\nu A^3} C(C-A)x y; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2\rho P_0}{\nu AC} (C-A)x y + 2\varepsilon \frac{M_3}{C} \sqrt{y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Відмітимо, що в системі (6) x , y – повільні змінні.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Систему (6) було розв’язано чисельно за початкових умов $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ та параметрів $P_0 = 0.48 \text{ м}^7$, $\nu = 1000 \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 1260 \text{ кг/м}^3$, $\varepsilon = 0.1$.

Графіки зміни величин $x = a^2$ і $y = r^2$ квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла визначені та представлені в двох випадках. В першому випадку (рис. 1, 2) $A = 8$, $C = 4$, $M_3 = -0.1$ або $M_3 = -0.3$. В другому випадку (рис. 3, 4) $A = 1.3$, $C = 1$, $M_3 = -0.1$ або $M_3 = -0.3$.

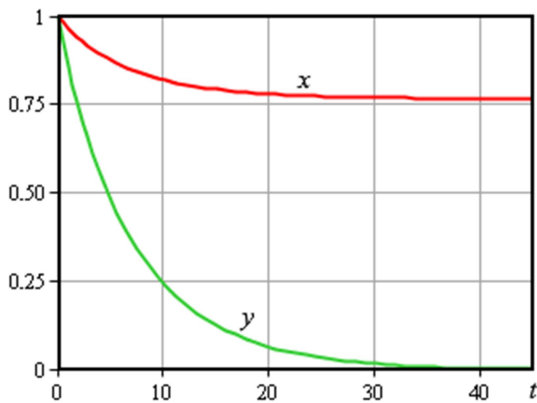


Рис. 1. Графіки змінних x і y в випадку $A = 8$, $C = 4$, $M_3 = -0.1$

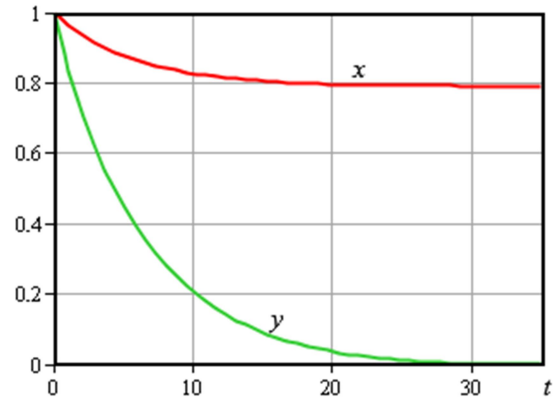


Рис. 2. Графіки змінних x і y в випадку $A = 8$, $C = 4$, $M_3 = -0.3$

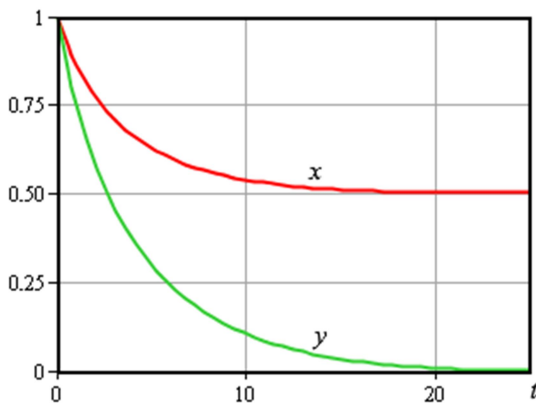


Рис. 3. Графіки змінних x і y в випадку $A = 1.3$, $C = 1$, $M_3 = -0.1$

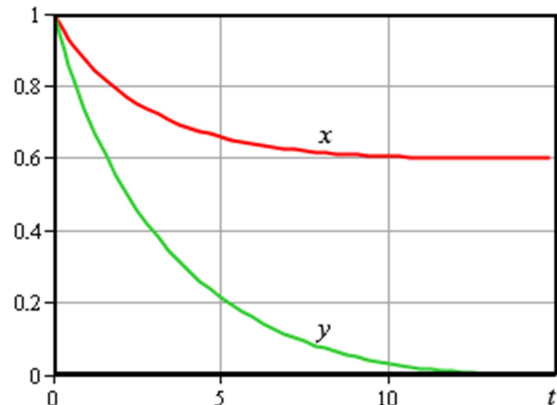


Рис. 4. Графіки змінних x і y в випадку $A = 1.3$, $C = 1$, $M_3 = -0.3$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Згідно до графіків $x = a^2$ і $y = r^2$, зображених на рис. 1–4: змінна y спадає та асимптотично наближається до нуля у всіх розглянутих випадках; змінна x також

спадає, але значення до якого вона прямує залежить від величини постійного моменту та співвідношення між моментами інерції.

Якщо модуль проекції постійного моменту сил $|M_3|$ зростає ($M_3 = -0.1; -0.3$), то граничне значення змінної x зростає: $x \rightarrow 0.76; 0.8$ (рис. 1, 2), $x \rightarrow 0.5; 0.6$ (рис. 3, 4), а змінна y швидше прямує до нуля.

В випадках, коли співвідношення між моментами інерції $A/C = 2$ та зменшується до $+1$ (при однакових інших параметрах), граничне значення змінної x зменшується: $x \rightarrow 0.76; 0.5$ (рис. 1, 3), $x \rightarrow 0.8; 0.6$ (рис. 2, 4), змінна y прямує до нуля.

6 ВИСНОВКИ

Досліджено рух динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною при малих числах Рейнольдса, під дією постійного моменту в зв'язаних з тілом осях.

Припущення про мализну збурюючих моментів сил дозволяє за допомогою методу усереднення досліджувати еволюцію обертань твердого тіла. Випадок постійного в зв'язаних осях збурюючого моменту відповідає, наприклад, обліку травлення в газореактивній системі орієнтації космічних апаратів. Запас рідини в порожнині на борту космічних апаратів або корабля може чинити суттєвий вплив на рух цих тіл.

Одержані результати можуть бути корисними для аналізу рухів супутників під дією малих внутрішніх і зовнішніх моментів сил.

Література

1. Chernousko F. L. The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid. Washington: NASA. 1972. 214 p.
2. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer International Publishing. 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7>.
3. Baranova E. U., Vil'ke V. G. Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid. Moscow Univ. Mech. Bull. 2013. № 68(1). pp. 15–20.
4. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Механика твердого тела, 2007. Вып. 37. С. 126–139.
5. Akulenko L. D., Zinkevich Y. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces. Cosmic Research. 2011. № 49(5). pp. 440–451. <https://doi.org/10.1134/S0010952511050017>.
6. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. Одесса: ОНУ им. И.И. Мечникова, 2013. 287 с.
7. Rachinskaya A. L. Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid. Cosmic Research. 2015. № 53(6). P. 476–480.
8. Dissler K., Galdi G.P., Mazzone G., Zunino P. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2016. № 221(1). pp. 487–526.
9. Ramodanov S.M., Sidorenko V.V. Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. № 95. pp. 42–46. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.006>.
10. Кононов Ю. Н. О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Механика твердого тела, 2000. № 30. С. 207–216.
11. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Optimal deceleration of rotation of a dynamically symmetric body with a cavity filled with viscous liquid in a resistive medium. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2010. № 49(2). pp. 222–226.

12. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostat with moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2019. № 58(5). pp. 667–673.
13. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 1992. № 28(8). pp. 524–528.
14. Amer W. S., Farag A. M., Abady I. M. Asymptotic analysis and numerical solutions for the rigid body containing a viscous liquid in cavity in the presence of gyrostatic moment. *Archive of Applied Mechanics*. 2021. № 91(9). pp. 3889–3902.
15. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Paliy K. S. Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. *Proc. IMechE. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. № 235(20). pp. 4833–4837.
16. Romano M. Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2008. № 100. pp. 181–189.
17. Van der Ha J. C. Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronautica*. 1985. № 12(10). pp. 861–869.
18. Kane T. R., Levinson D. A. Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body. *Journal of the Astronautical Sciences*. 1987. № 35(4). pp. 435–446.
19. Ayobi M. A., Longuski J. M. Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2008. № 75(1). 011004/1-011004/8.
20. Пивоваров М. Л. О движении гироскопа с малым самовозбуждением. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1985. № 6. С. 23–27.
21. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2023. № 148(3). 104284. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104284>.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. М.: Наука, 1973. 208с.
23. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Yu. A. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York: Gordon and Breach Science, 1961. 537 p.

References

1. Chernousko, F. L (1972). *The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid*. NASA. Washington.
2. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Cham: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7>.
3. Baranova, E. U., Vil'ke, V. G. (2013). Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid. *Moscow Univ. Mech. Bull.* 68(1). 15–20.
4. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2007). Evolyuciya vrashenij sputnika s polostyu, zapolnennoj vyazkoj zhidkostyu [Evolution of rotations of a satellite with cavity filled with viscous fluid]. *Mekh. Tverd. Tela*. 37. 126–139. [in Russian].
5. Akulenko, L. D., Zinkevich, Y. S., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2011). Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces. *Cosmic Research*. 49(5). 440–451. <https://doi.org/10.1134/S0010952511050017>.
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L., Zinkevich, Ya. S. (2013). *Vozmushennye i upravlyaemye vrasheniya tverdogo tela* [Perturbed and controlled rotations of a rigid body]. Odesa: ONU im. I. I. Mechnikova. [in Russian].
7. Rachinskaya, A. L. (2015). Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid. *Cosmic Research*. 53(6). 476–480.
8. Disser, K., Galdi, G. P., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 221(1). 487–526.
9. Ramodanov, S. M., Sidorenko, V. V. (2017). Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 95. 42–46.

- <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.006>.
10. Kononov, Yu. N. (2000). O dvizhenii sistemy svyazannyh tverdyh tel s polostyami, sodержashimi zhidkost [On the motion of a system of connected rigid bodies with cavities containing liquid]. *Mehanika tverdogo tela*. 30. 207–216. [in Russian].
 11. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2010). Optimal deceleration of rotation of a dynamically symmetric body with a cavity filled with viscous liquid in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 49(2). 222–226.
 12. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2019). Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostatt with moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 58(5). 667–673.
 13. Leshchenko, D. D., Sallam, S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28(8). 524–528.
 14. Amer, W. S., Farag, A. M., Abady, I. M. (2021). Asymptotic analysis and numerical solutions for the rigid body containing a viscous liquid in cavity in the presence of gyrostatic moment. *Archive of Applied Mechanics*. 91(9). 3889–3902.
 15. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Paliy, K. S. (2021). Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. *Proc. IMechE. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 235(20). 4833–4837.
 16. Romano, M. (2008). Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 100. 181–189.
 17. Van der Ha, J.C. (1985). Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronautica*. 12(10). 861–869.
 18. Kane, T. R., Levinson, D. A. (1987). Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body. *Journal of the Astronautical Sciences*. 35(4). 435–446.
 19. Ayobi, M. A., Longuski, J. M. (2008). Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 75(1). 011004/1-011004/8.
 20. Pivovarov, M. L. (1985). O dvizhenii giroskopa s malym samovozbuzhdeniem [The motion of a gyroscope with low self-excitation]. *Izv. Akad. Nauk SSR. Mekh. Tverd. Tela*. 6. 23–27. [in Russian].
 21. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2023). Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 148(3). 104284. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104284>.
 22. Landau, L. D., Lifshic, E. M. (1973). *Teoreticheskaya fizika. T.1. Mehanika* [Theoretical physics. T.1. Mechanics]. M.: Nauka. [in Russian].
 23. Bogoliubov, N. N., Mitropolsky, Yu. A. (1961). *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Gordon and Breach Science, New York.

Лещенко Дмитро Давидович

Одеська державна академія будівництва та архітектури
д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029, leshchenko_d@ukr.net
ORCID: 0000-0003-2436-221X

Козаченко Тетяна Олександрівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029, kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

Для посилань:

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Еволюція руху динамічно симетричного гіростата під дією постійного моменту. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. V. № 1. С. 25–32.

For references:

Leshchenko D., Kozachenko T. (2023). Evolution of dynamically symmetric gyrostatt motion under the action of constant torque. *Mechanics and Mathematical Methods*. V(1). 25–32.