УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ РАМ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ

Егупов К.В. *(Одесская Государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

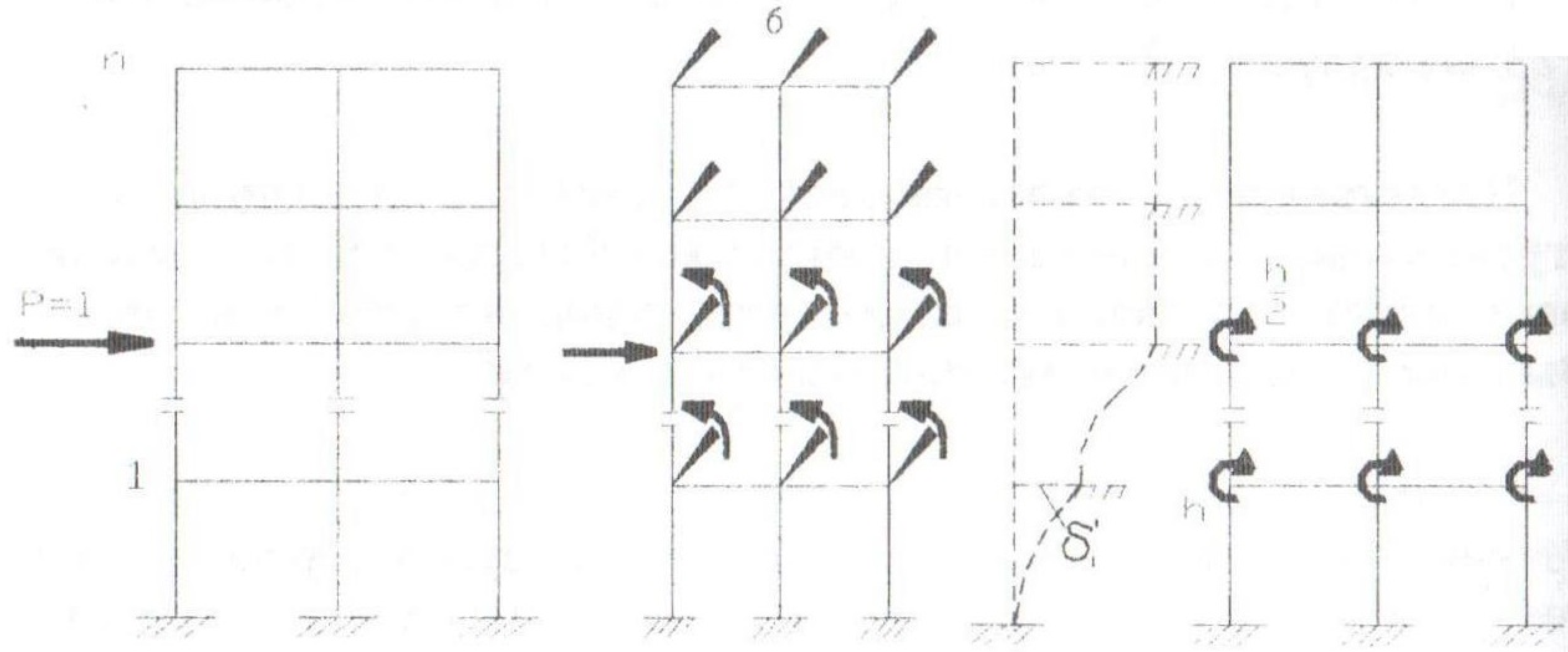
Представлены методы корректного сведения двумерных задач строительной механики к одномерным. Обсуждаются вопросы эффективности применения симметрии подобного деформирования. Выводы иллюстрируются числовым примером.

В нормах бывшего СССР и других стран при расчете зданий и сооружений на сейсмические воздействия используется упрощенная одномерная модель здания и сооружения в виде консольного стержня с сосредоточенными массами. Для упрощения расчетов используется метод сведения расчета многомассовой системы к расчету ряда одномассовых систем в виде осцилляторов. Приведенные массы таких систем определяются с использованием форм собственных колебаний заданной одномерной модели. Максимальная величина перемещений и сил инерции (сейсмических сил) определяется с использованием так называемого универсального спектра, предложенного американскими учеными Био и Хаузнером. Спектр представляет собой зависимость ускорения осциллятора от периода собственных колебаний многомассовой системы. В нормах многих стран спектр определяется как приведенное ускорение с введением в расчет поправочных коэффициентов, учитывающих интенсивность землетрясений, пластические деформации (и появление трещин), конструктивные особенности зданий, демпфирующие свойства сооружений, грунтовые условия, ответственность сооружения и т. д. Опыт землетрясений учитывается путем корректировки указанных выше коэффициентов или введением в расчет новых коэффициентов.

1. Исследование деформирования плоской рамы

Обычно рассматриваются простейшие математические модели зданий в виде “изгибной” и “сдвиговой” консоли с распределенными по высоте массами. Их использование в расчетах каркасных зданий вызывает затруднение, поскольку неизвестно каким образом определять величины изгибной и сдвиговой жесткости. Прежде всего необходимо выяснить характер деформирования плоских рам с одинаковыми высотами этажей h при воздействии на нее горизонтальных сил (статика) .

Исследование выполним с использованием метода перемещений строительной механики.



а б в

Рис.1 Модель рамы и преобразование внешних нагрузок

Пусть к i-му ярусу приложена горизонтальная сила P=1 (рис. 1. а).

Пользуясь принципом суперпозиции деформированное состояние рассматриваемой рамы получим как сумму деформированных состояний:

1. Рамы с защемленными горизонтально-подвижными узлами, загруженной силой P=1. (рис.1. б)

2. Рамы, загруженной сосредоточенными моментами, равными по величине и противоположными по знаку реактивным моментам в наложенных связях. (рис. 1. в)

Горизонтальные перемещения узлов первого деформированного состояния определяются как сумма линейных перекосов стоек рамы:

$$\delta'_{ii} = \delta'_1 + \delta'_2 + \ldots + \delta'_i \qquad (1)$$

В методе перемещений статики сооружений рассматривалось состояние для единичного линейного перекоса (рис 2. а):

$$r_k = \frac{12S_k}{h^2} \qquad (2)$$

где S_k - сумма погонных жесткостей стоек к-го яруса.

Так как в каждом сечении рамы поперечная сила равна 1 то линейный перекос от этой силы (рис. 2. б) найдется как величина обратная жесткости всех стоек.

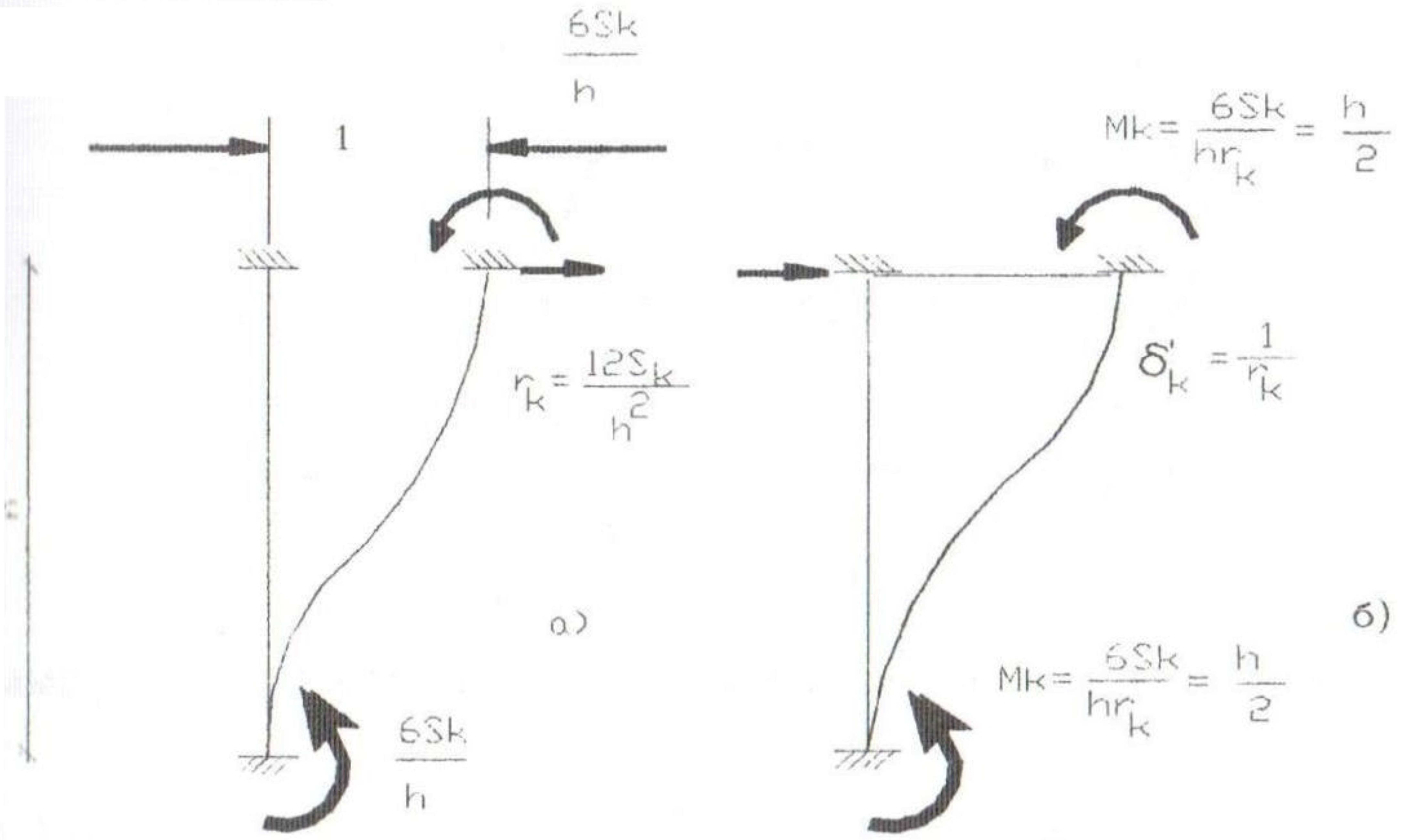


Рис. 2 Единичные состояния метода перемещений для стержня

$$\delta'_k = \frac{1}{r_k} = \frac{h^2}{12S_k}, \tag{3}$$

Таким образом, перемещение i-го яруса составит:

$$\delta_{ii} = \frac{h^2}{12}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{S_k} = \frac{h^2}{12}S_i, \tag{4}$$

Вышерасположенные ярусы переместятся поступательно $\delta_{ik} = \delta_{ki} = \delta_{ii}$. Во втором деформированном состоянии в узлах 1,2... i-1 рама загружена узловыми моментами, равными $2M' = 2\frac{6S_k}{hr_k} = h$ а в узле i- моментом $\frac{h}{2}$.

Допустим, что от воздействия горизонтальной силы все узлы яруса повернутся на одинаковы угол. Определим углы поворота каждого яруса рамы, применяя для этой цели метод перемещений (рис. 3).

Основную систему получим накладывая угловые связи (рис. 4) .

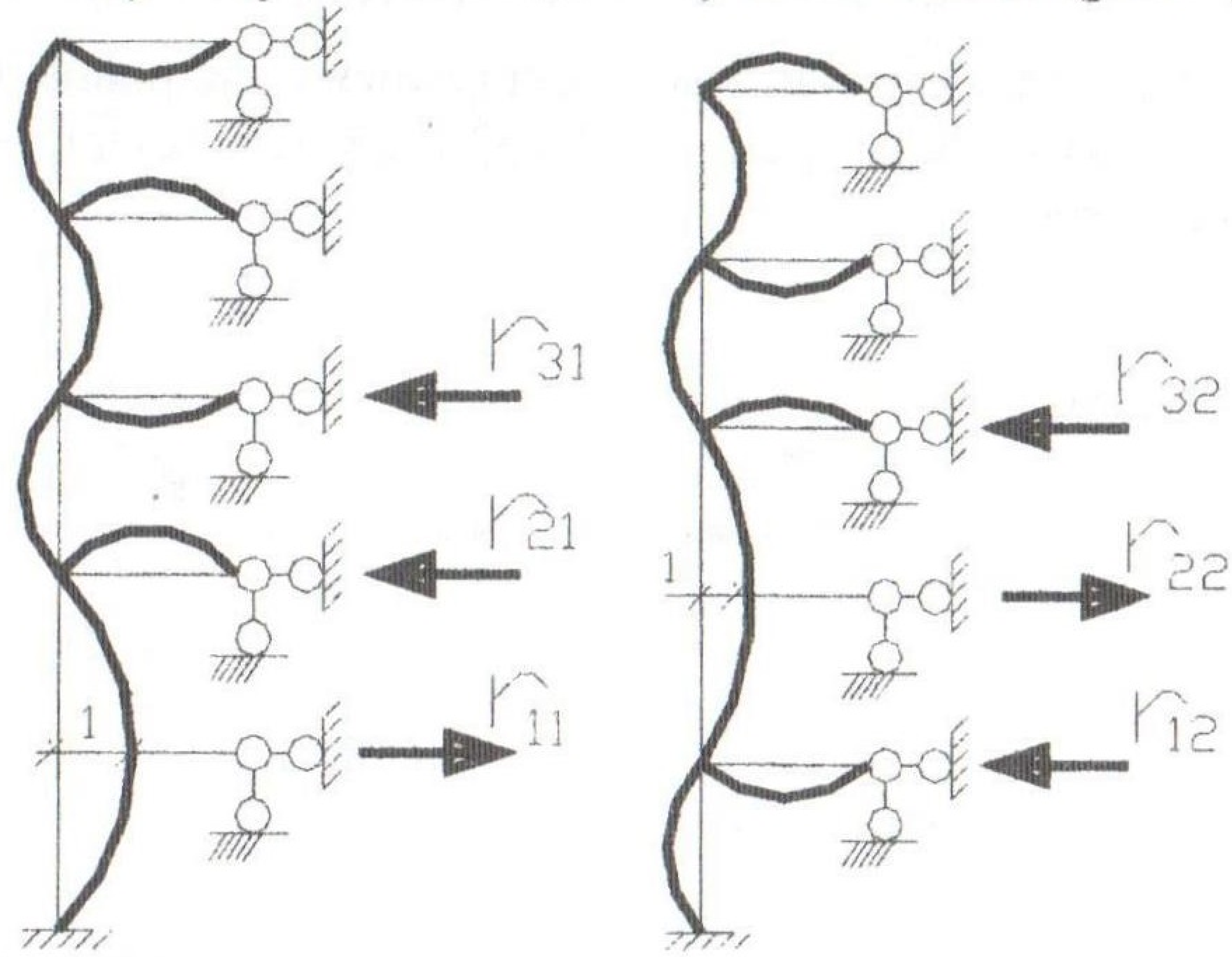


Рис.3 Единичные состояния метода перемещений для рамы

Уравнения метода перемещений запишутся в следующем виде :

$$
\begin{aligned}
&r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + \ldots + r_{1n}z_n + R_{1p} = 0 \\
&r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + \ldots + r_{2n}z_n + R_{2p} = 0 \qquad (5) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \ldots + r_{nn}z_n + R_{np} = 0
\end{aligned}
$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ - неизвестные углы поворота, r_{ij} - коэффициенты жесткости, определяемые из единичных состояний (рис. 4.) Единичным состоянием $z_k = 1$ (рис. 4.) упруго деформируется лишь стойка двух смежных этажей. Деформируемая часть оказывает воздействие на остальную часть рамы в виде реактивных моментов S_k и S_{k+1} , воспринимаемых наложенными абсолютно жесткими связями. Так как в каждом из единичных состояний возникают реактивные моменты лишь в трех смежных связях (К-1,К,К+1), $r_{k,k+2}, r_{k,k+3}$, то все и остальные коэффициенты равны 0 и уравнение (5) приобретает характерную структуру:

$$r_{k,k-1}z_{k-1} + r_{k,k}z_k + r_{k,k+1}z_{k+1} + R_{kp} = 0 \qquad (6)$$
$$(k = 1,2,\ldots,n)$$

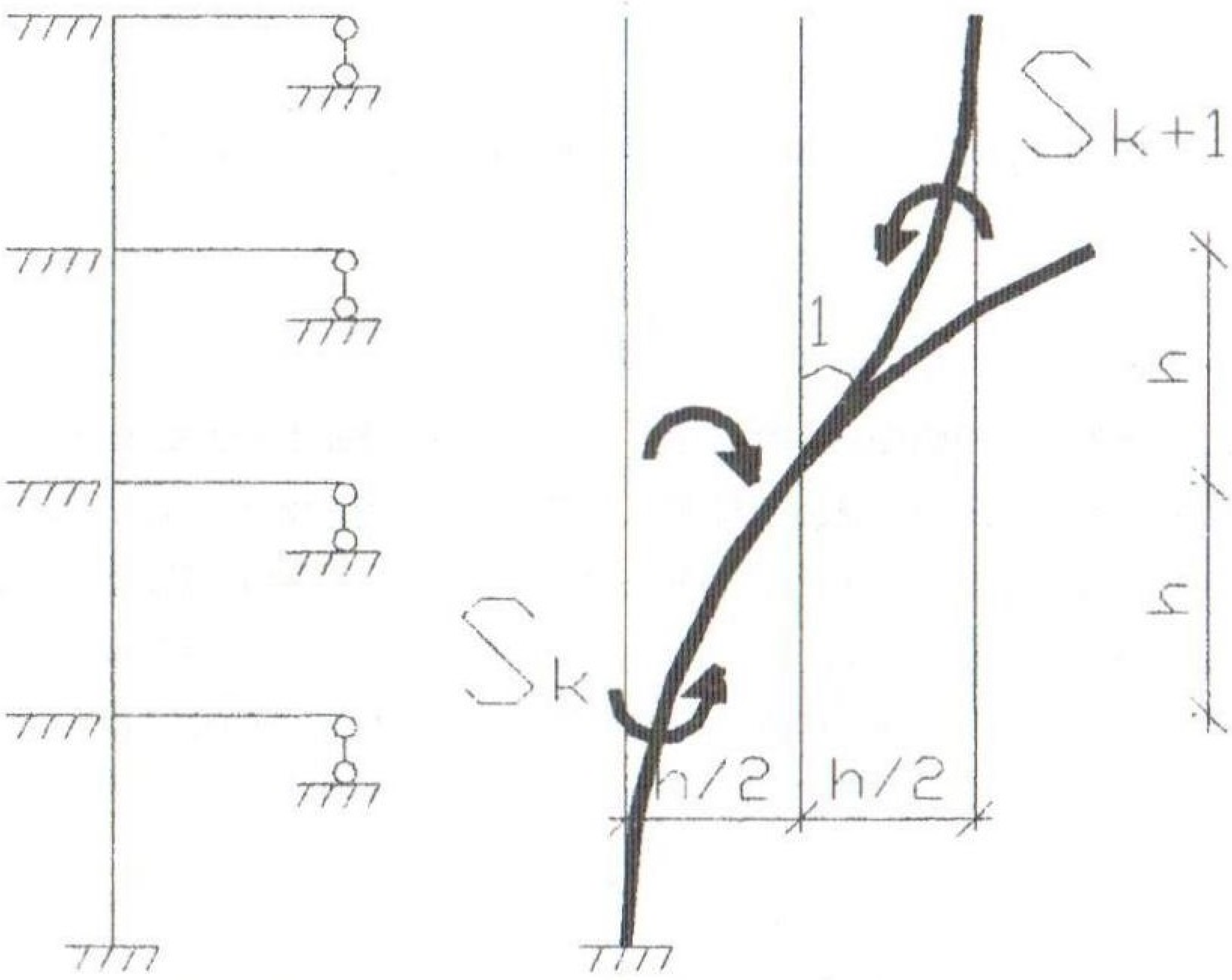


Рис. 4 Основная система (угловые связи) и единичное состояние

Единичный обратно-симметричный поворот концов ригелей яруса вызывает реактивный момент, равный ушестеренной погонной жесткости ригеля. Полагая сумму погонных жесткостей ригелей к-го яруса равной r_k , получим следующие формулы для определения коэффициентов жесткости уравнений (7)

$$r_{kk} = 12r_k + S_k + S_{k+1}\ , \qquad (7)$$
$$r_{k,k+1} = -S_{k+1}$$

Свободные члены уравнений, определяемые как реактивные моменты в наложенных угловых связях равны по величине и противоположны по знаку внешним моментам. Так как внешний момент в узле / ðàâåí $\frac{h}{2}$ (рис. 1.в), во всех других узлах - h, то свободные члены равны:

$$R_{1p} = -h\ ,\ R_{2p} = -h ,..., \qquad (8)$$
$$,R_{i+1,p} = 0...$$

Трехчленные уравнения метода перемещений в конечном виде запишутся следующим образом:

$$(12r_1 + S_1 + S_2)z_1 - S_2z_2 - h = 0 \qquad (9)$$

$$-S_2z_i + (12r_2 + S_2 + S_3)z_2 - S_3z_3 - h = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-S_iz_{i-1} + (12r_i + S_i + S_{i+1})z_i - S_{i+1}z_{i+1} - \frac{h}{2} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-S_nz_{n-1} + (12r_n + S_n)z_n = 0$$

Из рассмотрения значений коэффициентов трехчленных канонических уравнений можно установить, что значения главных коэффициентов во много раз превосходят значения побочных коэффициентов и, следовательно, имеет место малое взаимное влияние неизвестных. Решая уравнения приближенно в указанном предположении, найдем:

$$z_1 = \frac{h}{12r_1 + S_1},\ z_2 = \frac{h}{12r_2},\dots,z_{i-1} = \frac{h}{12r_{i-1}} \qquad (10)$$

$$z_i = \frac{h}{24r_i},z_{i+1} = z_n = 0$$

Каждое из единичных воздействий $z_1 = 1, z_2 = 1,\dots,z_{i-1} = 1$ на основную систему (рис. 4) вызывает линейные смещения, равные h, а единичное воздействие $z_i = 1$ линейное смещение $h/2$

Таким образом смещение δ''_{ii} будет равно:

$$\delta''_{ii} = z_ih + z_2h+\dots+z_{i-1}h + z_i\frac{h}{2} = h\left(\sum_{k=1}^{i=1} z_k + \frac{1}{2}z_i\right) \qquad (11)$$

Подставляя (2.10) в (2.11) получим

$$\delta''_{ii} = \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{r_1 + \frac{S_1}{12}} + \frac{1}{r_2}+\dots+\frac{1}{r_{i-1}} + \frac{1}{4r_i}\right) = \frac{h^2}{12}\left(R_i + \frac{1}{4r_i}\right) \qquad (12)$$

Перемещения $\delta''_{i+1,i} = \delta''_{i,i+1} =\dots= \delta_{n+1,i} = \delta''_{i,n+1}$ получим, если к δ''_{ii} добавим перемещение от воздействия $z_i = \frac{h}{24r_i}$

$$\delta''_{i+1,i} = \delta''_{i,i+1} =\dots= \delta''_{n+1,i} = \delta''_{i,n+1} = \delta''_{ii} + \frac{h}{24r_i}\frac{h}{2} \qquad (13)$$

Просуммируем теперь перемещения двух деформированных состояний

$$\delta_{ii} = \delta'_{ii} + \delta''_{ii} = \frac{h^2}{12}\left(S_i + R_i + \frac{1}{4r_i}\right); \qquad (14)$$

$$\delta_{ik} = \delta_{i,i+1} = \ldots = \delta_{in} = \delta_{ii} + \frac{h^2}{48r_i}$$

где

$$S_i = \sum_{k=1}^{i}\frac{1}{S_k}, R_i = \frac{1}{r_1 + \frac{1}{12}S_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_{i-1}}$$

При одновременном действии на раму горизонтальных сил, приложенных ко всем ярусам смещение верхнего яруса δ составит

$$\delta = P_1\delta_{n1} + P_2\delta_{n2} + \ldots + P_n\delta_{nn} \qquad (15)$$

Подставляя развернутые значения δ_{ik} и выполняя преобразования получим

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} Q_k c_k - \frac{h^2}{24}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{P_k}{r_k} \qquad (16)$$

где $Q_k = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i$ - поперечная сила

$c_k = \dfrac{h^2}{12}\left(\dfrac{1}{S_k} + \dfrac{1}{r_k}\right)$ - линейный перекос к-го этажа от поперечной силы.

Для нижнего и верхнего этажей перекос составляет

$$c_1 = \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{2}S_1}\right), \quad c_n = \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{S_n} + \frac{1}{4r_n}\right) \qquad (17)$$

При большом числе этажей второй член формулы (2.16) может быть опущен, в виду его относительной малости, и тогда

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} Q_k c_k \tag{18}$$

Для рам с неравными высотами этажей могут быть получены аналогичные формулы для единичных перемещений.

$$\delta_{11} = \frac{1}{12}\left(S_1 + R_1\right); \tag{19}$$

$$\delta_{ii} = \frac{1}{12}\left(S_i + R_i + \frac{h_i^2}{4r_i}\right) \quad i = 2{,}3,\ldots$$

$$\delta_{ik} = \delta_{i,i+1} = \ldots = \delta_{in} = \delta_{ii} + \frac{h_i h_{i+1}}{48r_i}$$

где - $S_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{h_k^2}{S_k}, R_1 = \frac{h_1^2}{4r_1 + 0{,}33\delta_1}, R_2 = \frac{\left(h_1 + h_2\right)^2}{4r_1 + 0{,}33S_1},$

$$R_i = R_{i-1} + \frac{\left(h_{i-1} + h_i\right)^2}{4r_{i-1}}, i = 3{,}4,\ldots$$

Для зданий промышленного типа погонная жесткость ригелей может в несколько раз превышать погонную жесткость стоек. В этом случае может быть принято допущение о недеформируемости ригелей рам. Тогда единичные перемещения рам определяются формулой

$$\delta_{ii} = \delta_{i,i+1} = \ldots = \delta_{in} = \sum_{k=1}^{i} \frac{h_k^2}{12S_k} \tag{20}$$

Заключение

1. В неявном виде понятие симметрии используется в теории упругости, сопротивлении материалов и строительной механике. Задача, имеющая теоретическое и практическое значение заключается в том, чтобы сложные представления симметрии приобрели более ясное очертание Особенно это касается во-

просов моделирования конструкций в которых понятие симметрии еще не нашло должного отражения.

2. В работах [1-3] рассмотрен новый тип симметрии - симметрия подобного деформирования упругих систем. Математически это означает, что матрицы жесткости (податливости) отличных друг от друга по геометрическим и жесткостным характеристикам плоских элементов здания (рамы, диафрагмы и т.д.) обладают свойством коммутативности (строго или приближенно). Последнее означает, что их собственные векторы неразличимы (с точностью до постоянного множителя).
3. Симметрия подобного деформирования позволяет трехмерную систему свести к расчету ряда двумерных. К последним в свою очередь можно применить "симметрию подобного деформирования" и "сжимать" двумерные системы, приводя их к одномерным, в частности, к консольному стержню.

Литература

1. Егупов В.К.,Егупов К.В.,Лукаш Э.П. Практические методы расчета зданий на сейсмостойкость.- Киев.:Будивельник,1982.-232с.
2. Yegupov K.V. Seismic loads and soil conditions. VI symposium on Earthquake Engineering, University of Roorkee, Oct.5-7,1978,vol.1 pp. 301-304
3. Yegupov V.K.,Yegupov K.V.,Starodub V.I. Taking into account three-dimensional deformations of buildings in normsetting calculations. Ninth European conference on earthquake engineering, Moscow 1990, vol. 7-a pp. 44-51
4. Yegupov V., Yegupov K., Starodub V.,Mazur P., Kostrjitskiy A., Simulation and Automation of Calculations of Buildings (Structures) on Seicmic Effects. An International Journal Computers & Structures, Pergamon, Oxford, 1997, Vol. 63, No. 6, pp. 1065-1083.
5. Yegupov K.V.&Kostrjitskiy A.V. Building configuration and seismic design. Proceedings of the Eleventh European Conference on Earthquake Engineering. Abstract Volume, Paris, 1998, pp.662.